多目的最適化の基礎と応用

荒川雅生
（香川大学）

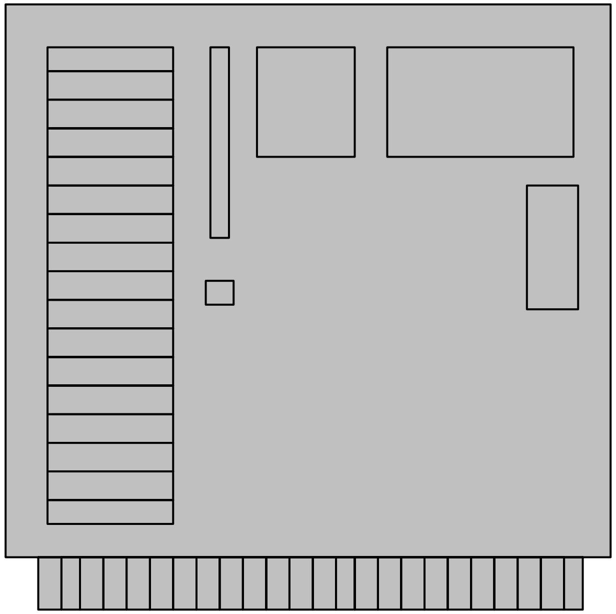
多目的最適化の必要性（私見）

- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？

最適化の対象

多目的最適化の必要性（私見）

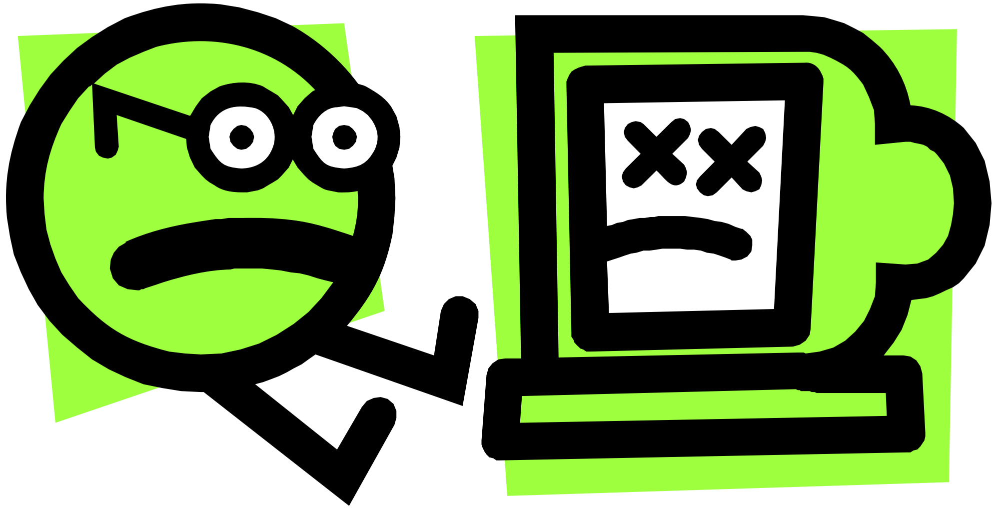
- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？



シミュレーション

多目的最適化の必要性(私見)

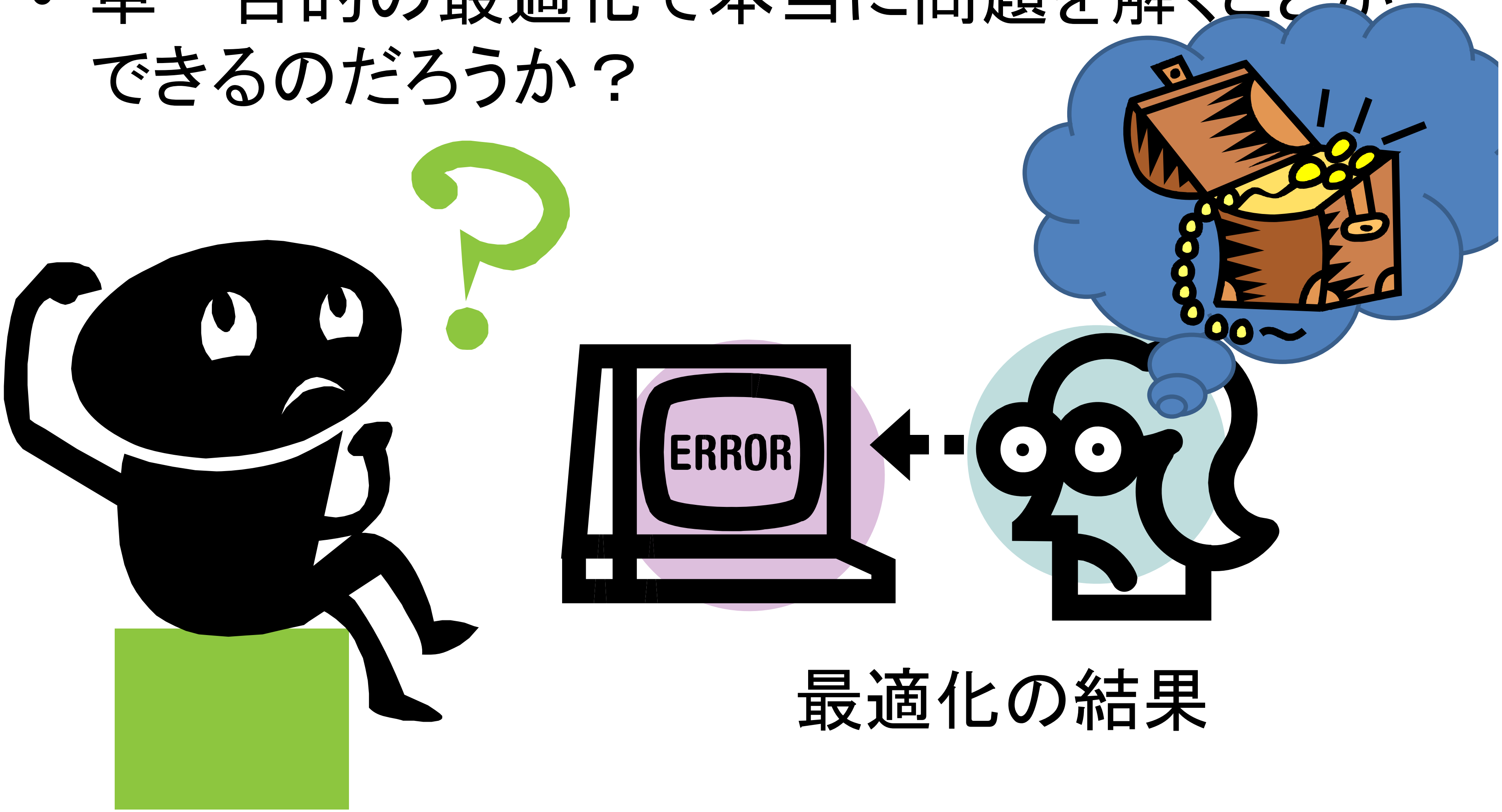
- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？



最適化のモデル構築

多目的最適化の必要性（私見）

- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？



最適化の結果

多目的最適化の必要性（私見）

- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？

多目的最適化の必要性（私見）

- 単一目的の最適化で本当に問題を解くことができるのだろうか？

最適化のモデリング

- 単一目的の最適化の場合

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$s.t.$

$$g_j(\mathbf{x}) \le g_j^a \,(j = 1,2,\ldots,M)$$

$$x_i^{Low} \le x_i \le x_i^{Up} \,(i = 1,2,\ldots,N)$$

- 目的関数は本当にそれでいいの？
  - 問題の本質を捉えていますか？
- 制約条件の許容値ってその値で本当に適切なの？
- 厳しすぎない？
  - 現状が一番よくなってしまいますよ！！
- 緩すぎない？
  - 非現実的な結果になって，相手にされませんよ！！

最適化の結果は．．．

- いい設定をすると
  - 往々にして，ベテランの技術者の出す結果と同じになる．
  - 当たり前の結果しか導かない
  - その設定はいったんわかってしまえば誰でも同じ結果を出せる．
  - 最適化は技術の伝承にも役立つ

線形計画法の問題を解いて見ましょう

A社では，２種類の製品P1,P2を生産している. P1を1トン生産するには原料を2．5トン，電力量を5kWh,労力を3時間人区必要とし，P2を1トン生産するには原料を5トン，電力量を6kWh,労力を2時間人区必要とする. １日の限界量として原料は350トン，電力量450kWh, 人区240時間の制限がある. また，P1は1トン当たり4万円，P2は5万円の単価で販売できる. 利益を最大化するためにはどのようにすればよいか？

LPの定式化

$$\min_{\mathbf{x}} 4x_1 + 5x_2$$

$$s.t.$$

$$2.5x_1 + 5x_2 \leq 350$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 450$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$0 \leq x_i \, (i = 1,2)$$

重要なのは本来は答えではない

- LPでは感度解析をタブローの中に見ることが可能
  - 感度解析とは,
    - 設計変数が少し動いたら，挙動変数がどう変化するではない.
    - 許容値を動かしたら最適化の結果がどう動くかをしることで，これによってさまざまな改善案や施策を提案できる.
    - それは，実はラグランジュ乗数にあるのに．．．．

多目的最適化では，，，

- トレードオフ分析
  - 目的関数間のトレードオフ関係から，設計者が求めたい選好解を見つけ出そう
- 単一目的の最適化で制約条件に入れざる得なかったもの，そう勘違いして入れていたものを自由にできる．（目的関数として）
  - 探索空間を広げることが可能
    - 意外な結果を出すことも可能
  - 挙動変数の関係を知ることが可能
    - 扱っている問題の本質を知ることが可能
  - 単一目的でいう適切な許容値の設定が可能
    - これがものすごく重要！！！！！

最適化のモデリング

- 多目的の最適化の場合

$$\min_{\mathbf{x}} \{ f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_L(\mathbf{x}) \}^T$$

$$s.t.$$

$$g_j(\mathbf{x}) \le g_j^a \, (j = 1,2,\ldots,M)$$

$$x_i^{Low} \le x_i \le x_i^{Up} \, (i = 1,2,\ldots,N)$$

多目的最適化は欲張り

- すべての目的関数を最適化したい.

多目的最適化は欲張り

- あちらを立てれば.

多目的最適化は欲張り

- こちらがたたず.

多目的最適化は欲張り

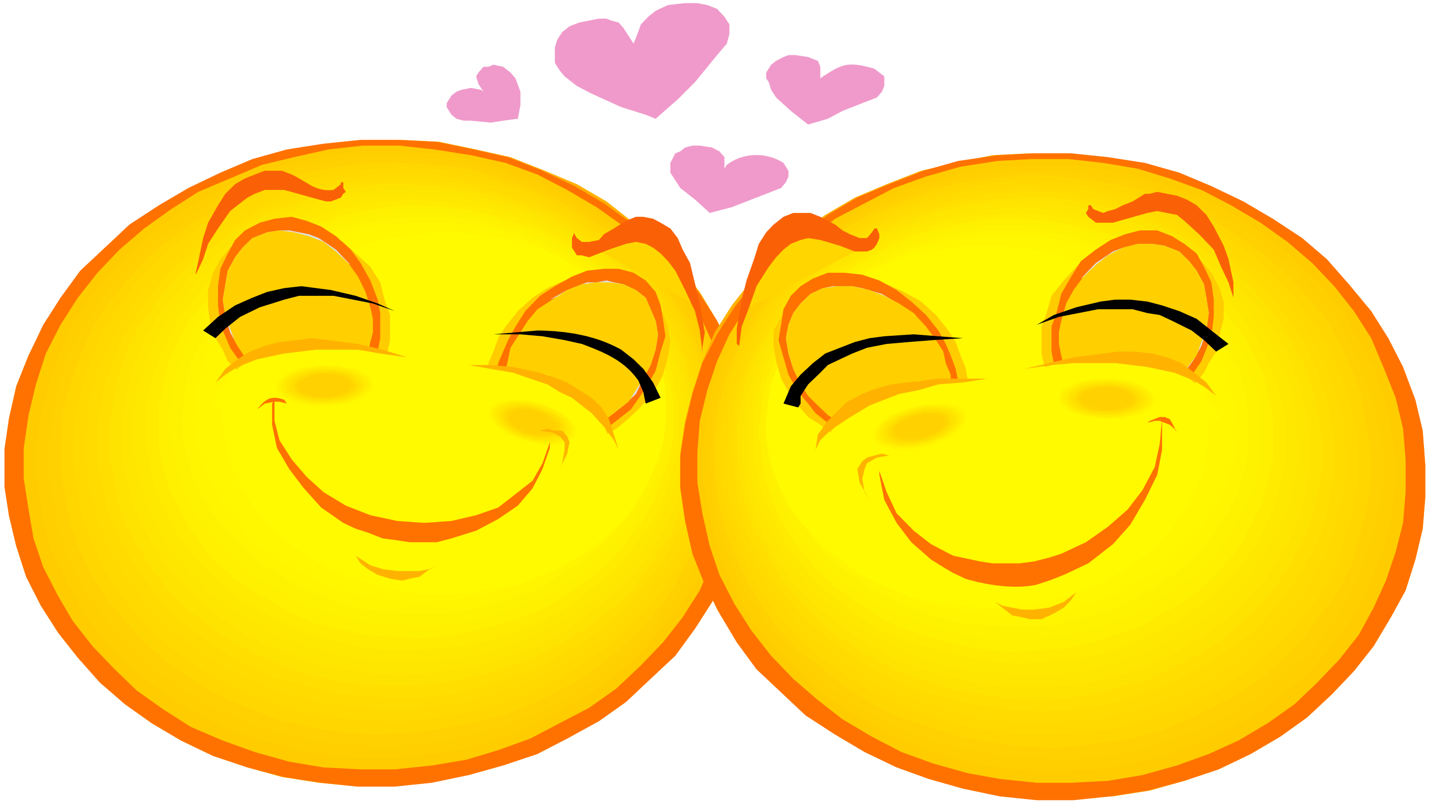
- あちらを立てればこちらがたたず.

トレードオフ分析

- どの程度で妥協するかを考えよう！！

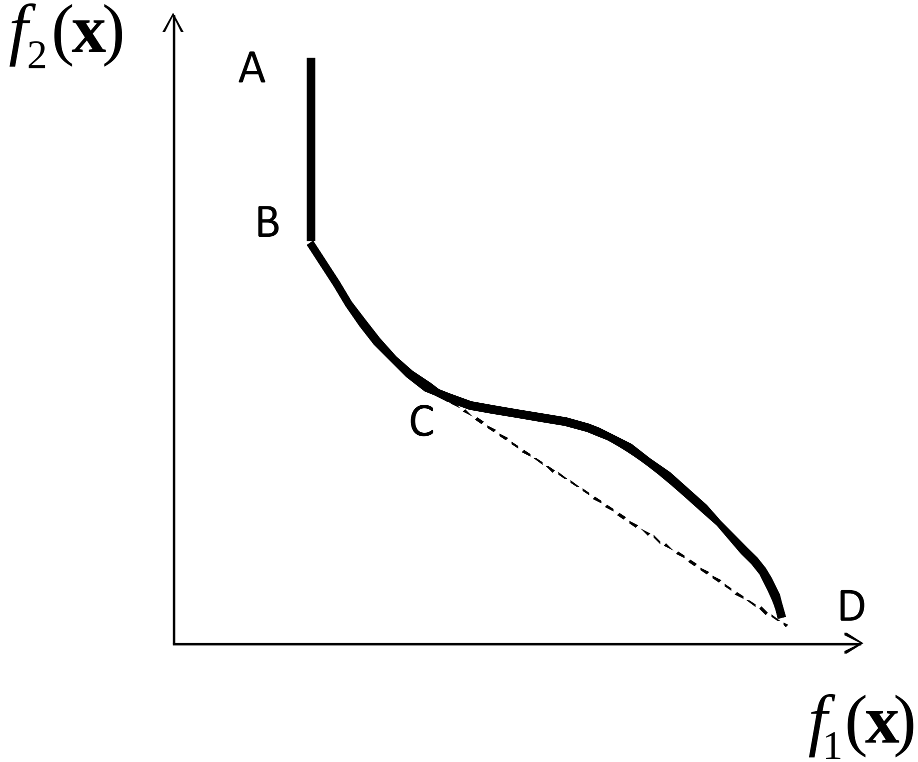
トレードオフ分析

- どの程度で妥協するかを考えよう！！



多目的最適化の解の概念

- Edgeworth-Pareto解
  - 非劣解ともいう.



Francis Ysidro Edgeworth
Irish, 1845-1926

Vilfredo Pareto
Italian, 1848-1923

A-B:弱パレート解
B-C:凸なパレート解
C-D:凹なパレート解

ちょっとした幻想

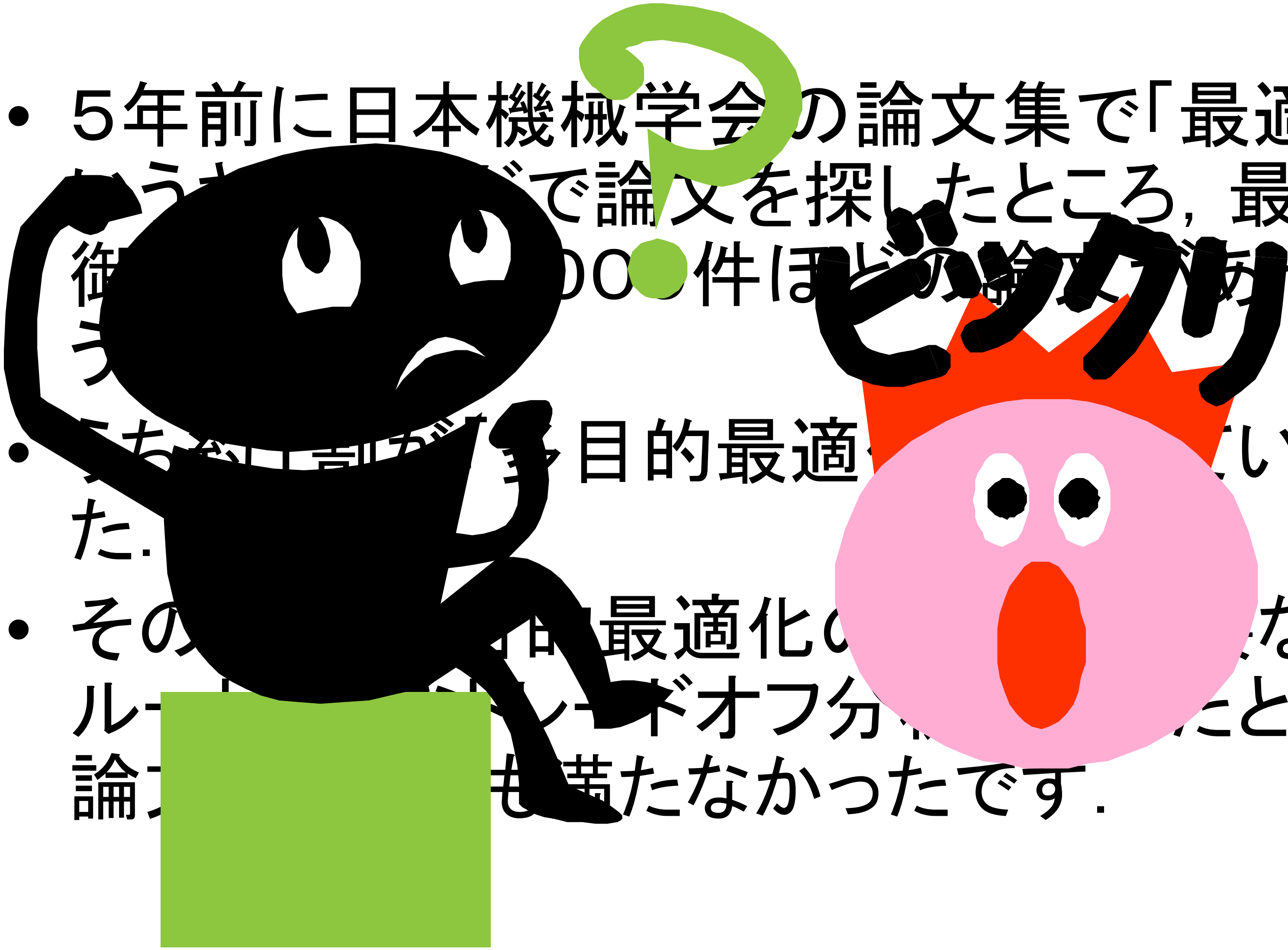
- パレート解全体が意思決定の前にわかれば，
  意思決定者

- パレート

- と主張 たのは今から15
  年ほど前の でも，実際にはそうでは
  なさそうです．．．．．

一見，なんの変哲もないけど

- ５年前に日本機械学会の論文集で「最適」と い で論文を探したところ，最適制 御 00件ほど あったそ う
- そち 割が「多目的最適 ていまし た．
- その 的最適化の な，フ ルー ドオフ分 たという 論 も満たなかったです．

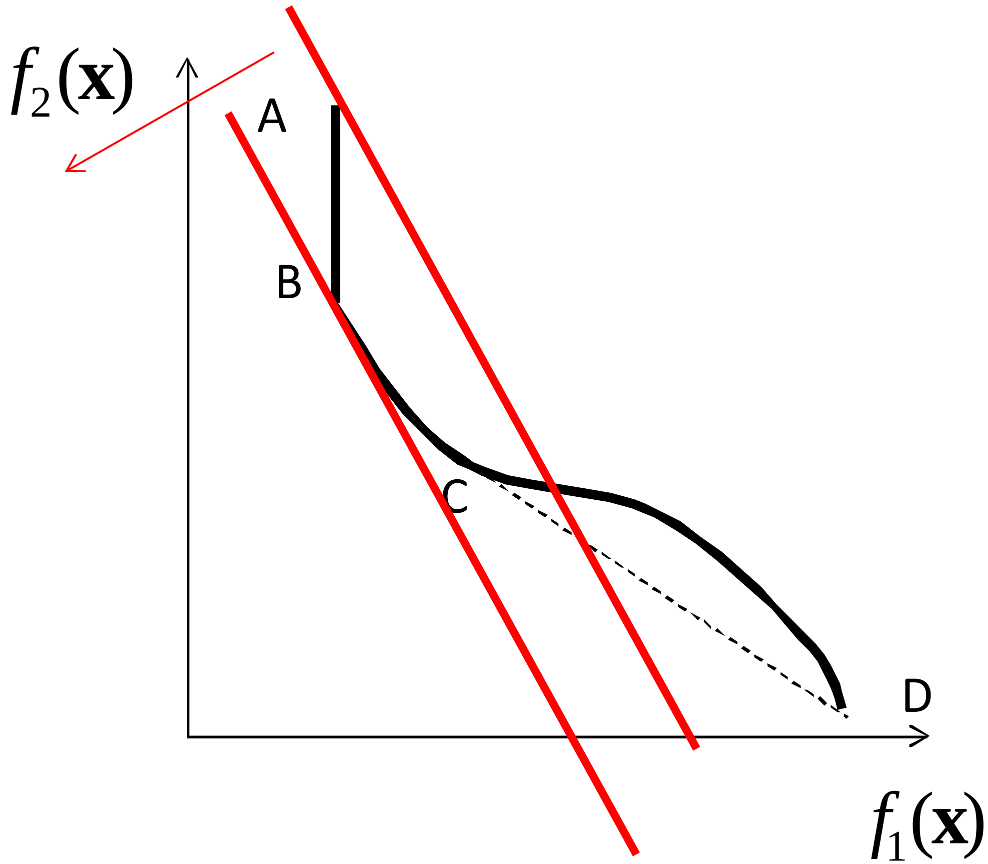


多目的最適化の解法

1. 荷重和法
2. 制約法
3. ゴールプログラミング
4. 満足化トレードオフ法

荷重和法

$$\min \Phi(\mathbf{x}) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + \ldots, w_L f_L(\mathbf{x})$$



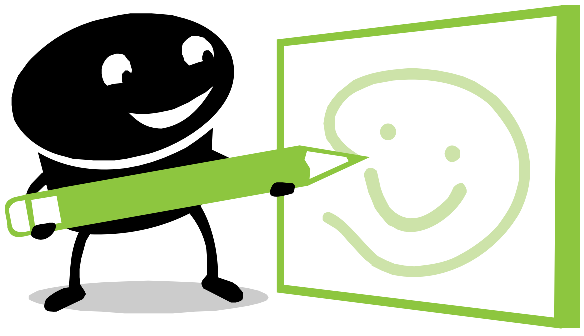
ご冗談でしょ！中山先生

$$\min \quad \{y_1, y_2, y_3\}^T$$

$s.t.$

$$(y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 + (y_3 - 1)^2 \leq 1$$

こんな簡単な問題が解けないわけないじゃないですか？
馬鹿にしないでください.



解法

$$w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

うんと良くしたい　　少し良くしたい

$$w_1 = 10, w_2 = 2, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{10}{\sqrt{105}}, y_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{105}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{105}}$$

悪くなっている！！！

解法

$$w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

うんと良くしたい　　少し良くしたい

$$w_1 = 10, w_2 = 2, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{10}{\sqrt{105}}, y_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{105}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{105}}$$

重み10倍　　重み7倍

重みの正規化に失敗していたんだ！！！！

あんまり，感覚とはマッチしないおもみだなぁ

解法

$$w_1 = 1, w_2 = 1, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

うんと良くしたい　少し良くしたい

$$w_1 = 10, w_2 = 7, w_3 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{10}{\sqrt{150}}, y_2 = 1 - \frac{7}{\sqrt{150}}, y_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{150}}$$

悪くなっている！！！

当然の結果です

荷重和法は簡単なこともあり世の中で広く使われていますが，凹なパレート解があると対応ができません．さらに，意思決定に必要な

「選好」≠「解の挙動」

であるために，トレードオフ分析が極めて難しい方法なのです．

知能情報学部 学部長
中山 弘隆 教授 工学博士

制約法

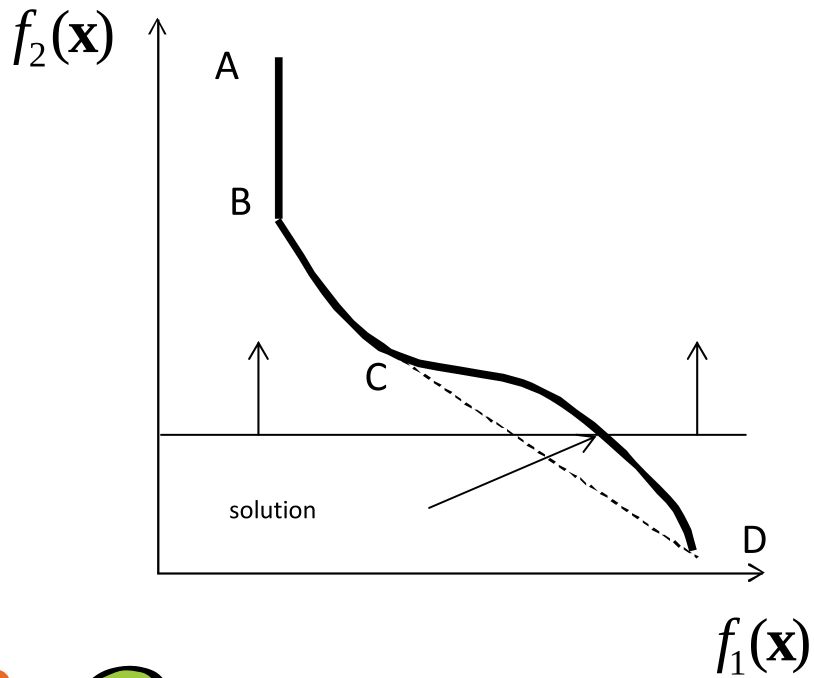
$$\min \quad f_1(\mathbf{x})$$

$$s.t.$$

$$f_k(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_k \, (k = 2, \ldots, L)$$

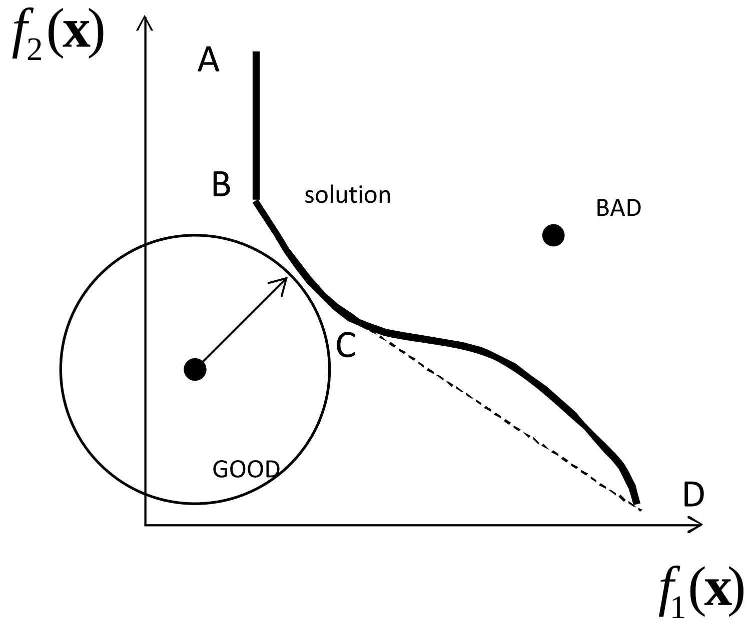
$$g_j(\mathbf{x}) \leq g_j^a \, (j = 1, \ldots, M)$$

$$low_i \leq x_i \leq up_i \, (i = 1, \ldots, N)$$



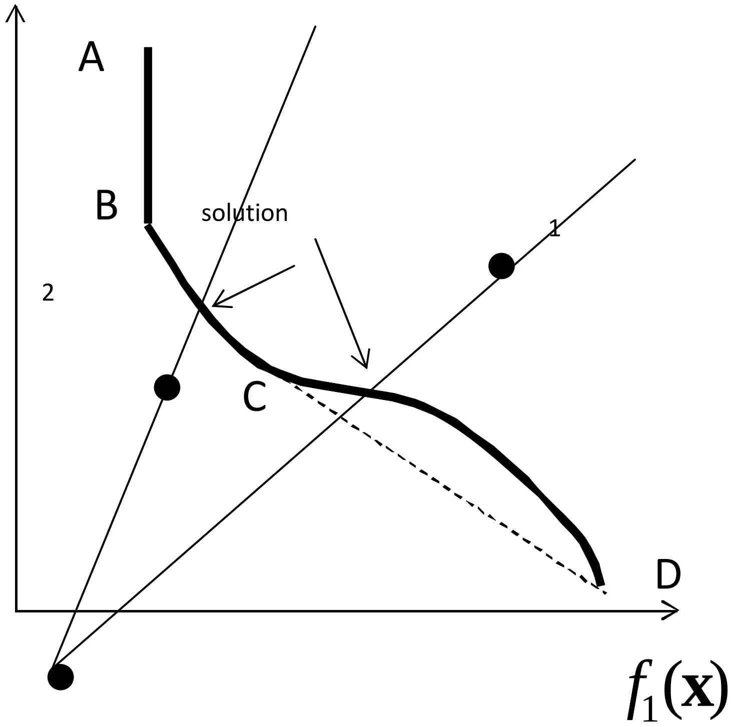
ゴールプログラミング

$$\min \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{L} w_k \left(f_k(\mathbf{x}) - goal_k \right)^2$$



満足化トレードオフ法

$$\min \Phi(\mathbf{x}) = Max\left(w_k \frac{f_k(\mathbf{x}) - asp_k}{asp_k - ideal_k} \right) f_2(\mathbf{x})$$



例題の結果をまとめます

$$ideal = \{0,0,0\}, asp = \{1,1,1\} \Rightarrow y_1 = 0.423, y_2 = 0.423, y_3 = 0.423$$

$$ideal = \{0,0,0\}, asp = \{0.35,0.40,0.47\} \Rightarrow y_1 = 0.366, y_2 = 0.418, y_3 = 0.491$$

$$ideal = \{0,0,0\}, asp = \{0.35,0.40,0.50\} \Rightarrow y_1 = 0.358, y_2 = 0.409, y_3 = 0.511$$

確かにトレードオフを希望通りにできている！！

この方法の欠点は？

- 基本的にミニマックス法である．関数の連続性を考えると最適化困難な定式化でよくない！！！
  - 確かのその通り

$$\text{minimize} \quad z + \alpha \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}} w_i \frac{f_i(\mathbf{x}) - asp_i}{asp_i - ideal_i}$$

$$\text{subj. to} \quad w_i \frac{f_i(\mathbf{x}) - asp_i}{asp_i - ideal_i} \leq \beta\, z \quad (i = 1, \ldots, r)$$

$$x \in X$$

$\beta = 1$ $\Rightarrow$ 目的

$\beta = 0$ $\Rightarrow$ 制約

知能情報学部 学部長
中山 弘隆 教授 工学博士

結果的に

- 満足化トレードオフ法を利用して多目的最適化を解くということは，設計者がいったいどんなプロダクトを作りたいかという意思が重要

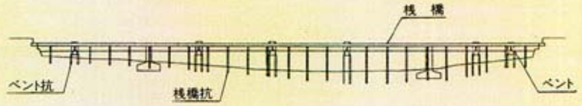
The Swan Bridge
Ube City / Japan

白鳥大橋（常盤公園）
宇部市

架設要領

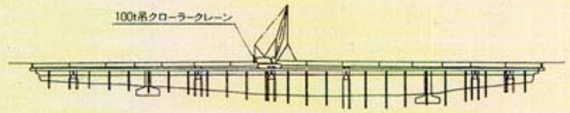
STEP1

○ベント設置(6基)
○桟橋架設(幅6~8m長さ150m)



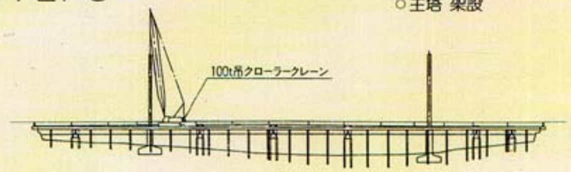
STEP2

○主桁 架設(15ブロック)
○キャンバー調整
○高力ボルト本締



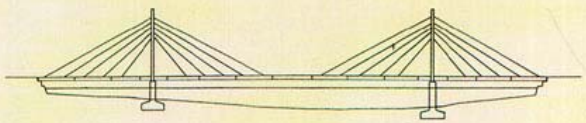
STEP3

○主塔 ヤード溶接
○主塔 架設



STEP4

○ケーブル架設
○ケーブル張力調整
○ベント、桟橋 解体
○塗装、橋面工

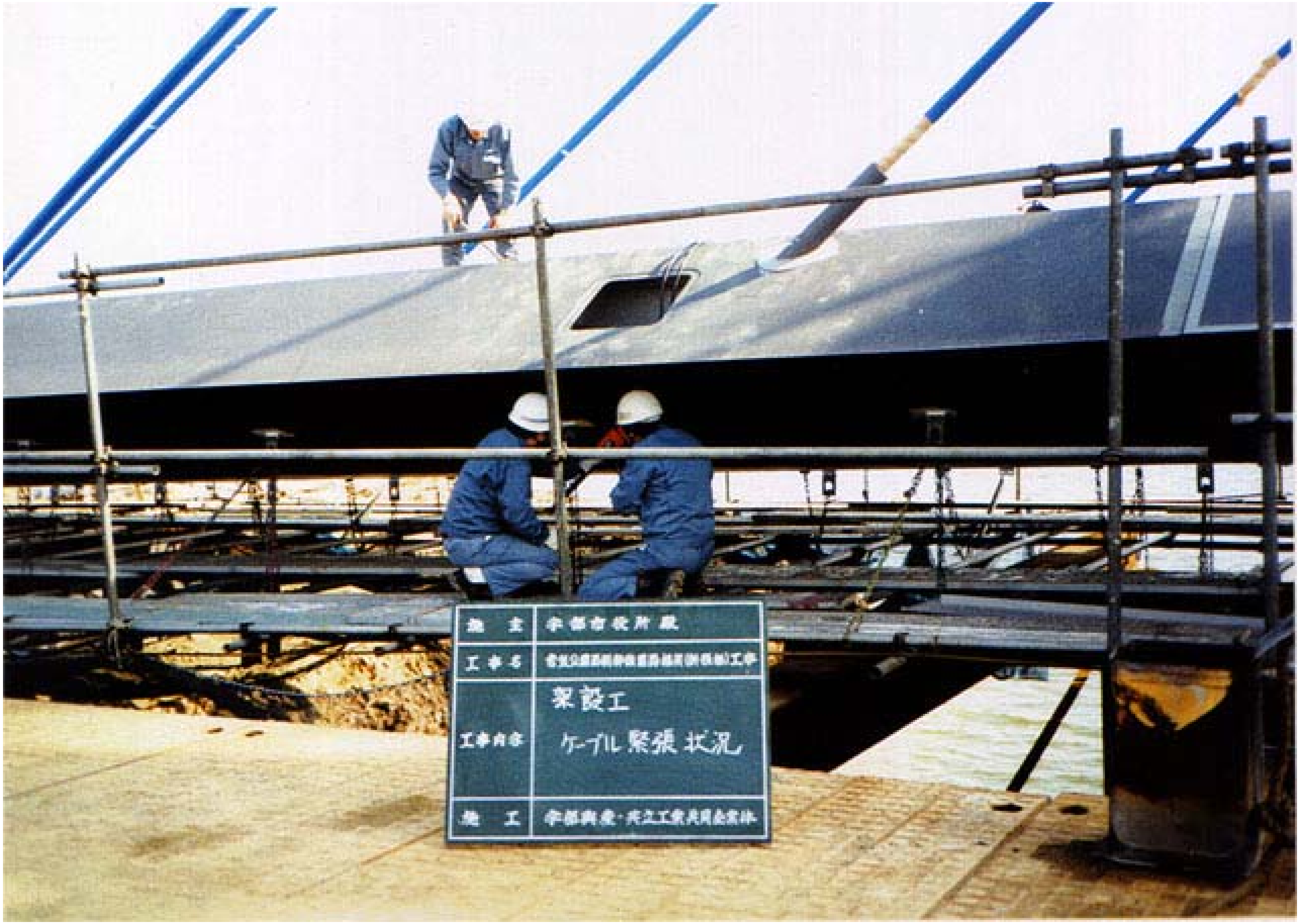


架設精度管理システム

斜張橋は、ケーブル張力を任意に設定し構造系の断面力バランスを改善できるという他の橋梁には例を見ない特長を持っていますが、そのためにケーブル張力、主桁キャンバー、主塔のたおれといったいろいろな管理項目を架設時に調整しなければなりません。

常盤大橋では、多目的計画法(満足化トレードオフ法)を用いた架設精度管理システム(協力:椹木義一京都大学名誉教授・中山弘隆甲南大学教授)により現場状況に応じたケーブル張力調整量を、現地に持ちこんだパソコンでリアルタイムに計算します。この結果をもとにケーブル端部に設けられた定着ナットを回転させてケーブルの長さを調整し、各管理項目が設計値どおりになるように架設精度の管理を行います。


'88 6 13


施主
宇部市役所殿
工事名
工事内容
架設工
ケーブル緊張状況
施工
宇部興産・共立工業共同企業体

斜張橋架設精度管理問題

残留ケーブル張力誤差

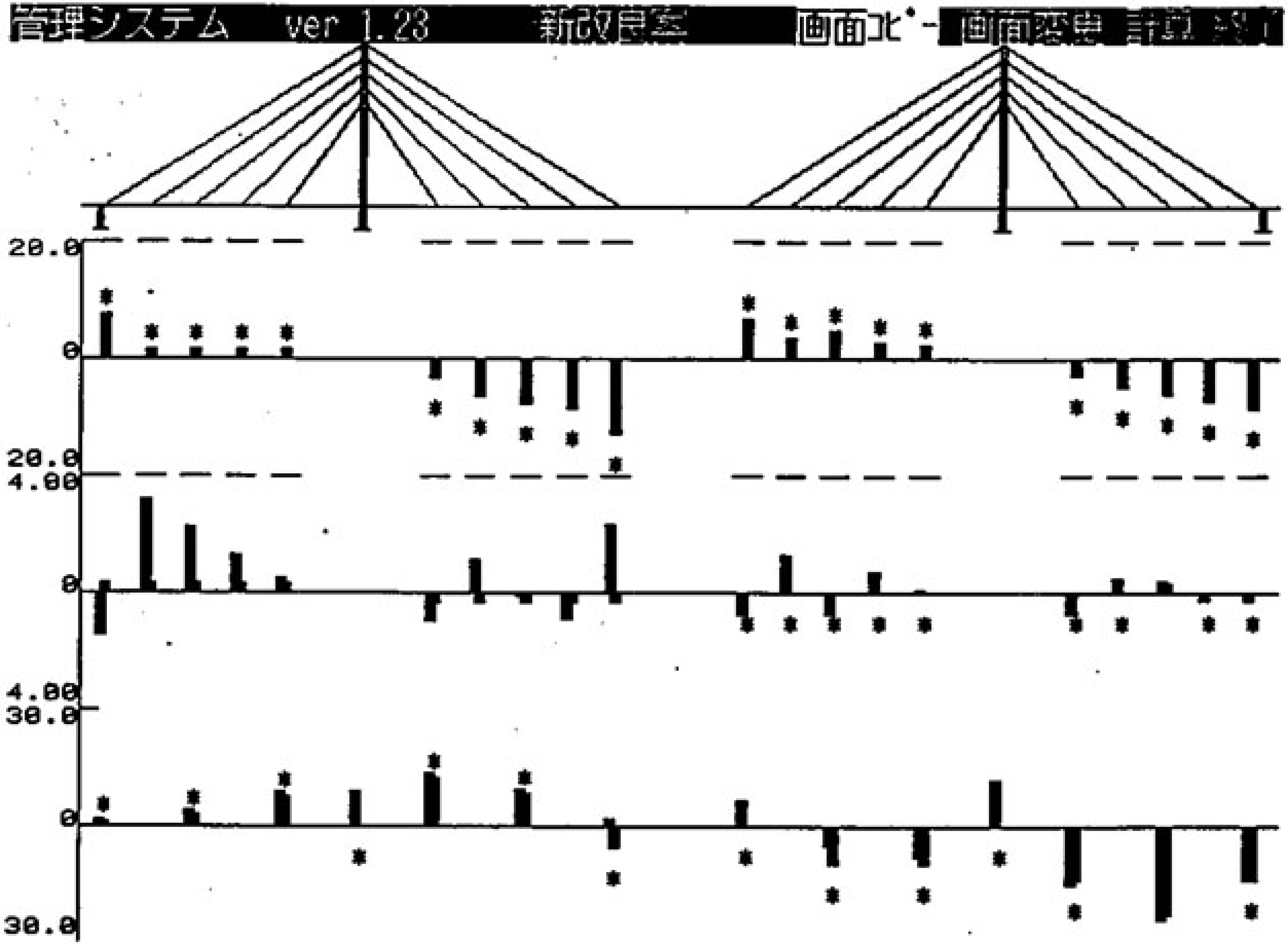
$$p_i = |\Delta T_i - \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \Delta l_k| \quad (i = 1, \cdots, n) \rightarrow \mathrm{Min}$$

残留キャンバー誤差

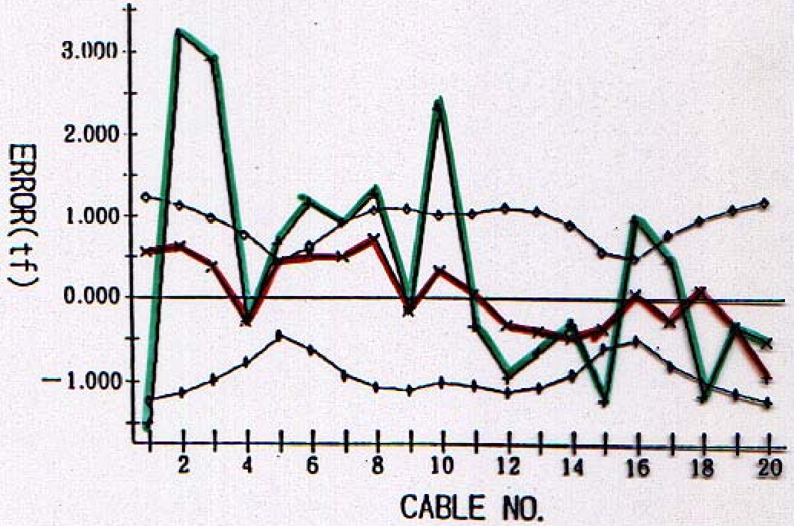
$$q_j = |\Delta Z_j - \sum_{k=1}^{n} Y_{jk} \Delta l_k| \quad (j = 1, \cdots, m) \rightarrow \mathrm{Min}$$

シム量

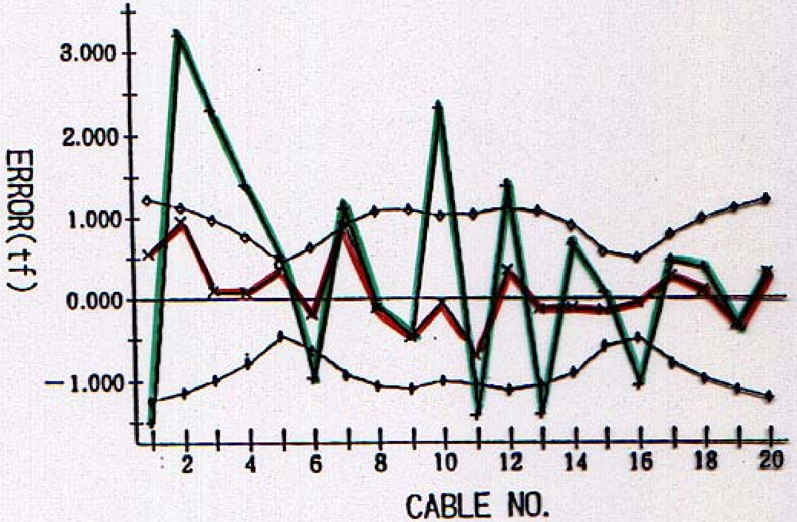
$$r_i = |\Delta l_i| \qquad (i = 1, \cdots, n) \rightarrow \mathrm{Min}$$



管理システム ver 1.23
新改良案
画面コピー
画面変更
20.0
0
20.0
4.00
0
4.00
30.0
0
30.0



ERROR IN CABLE TENSION(EAST SIDE)



ERROR IN CABLE TENSION(WEST SIDE)

: BEFORE ADJUSTMENT

: AFTER ADJUSTMENT

: UPPER ALLOWABLE LIMIT

: LOWER ALLOWABLE LIMIT

The Swan Bridge　　白鳥大橋

Ube City / Japan　　宇部市

烏尾ハープ橋　（福岡県飯塚市）　　1992 January

Karasuo Harp Bridge (Iizuka, Fukuoka)

プラントの運転の最適化

- 電力自由化によって，従来のように寿命を全うするだけではなく，機器に負荷をかけてでも早期に立ち上げる必要が出てくるなど，運転パターンが非常に複雑になってきている．
- 要求
  - 立ち上げ速度を上げる（目的関数１）
  - 燃料の効率をよくする（目的関数２）
  - 寿命を持たせる（目的関数３）
- 制約
  - 機器の寿命（制約条件１，目的関数3と同じ）
  - NoX,CoX（制約条件２）

プラントの制御機器

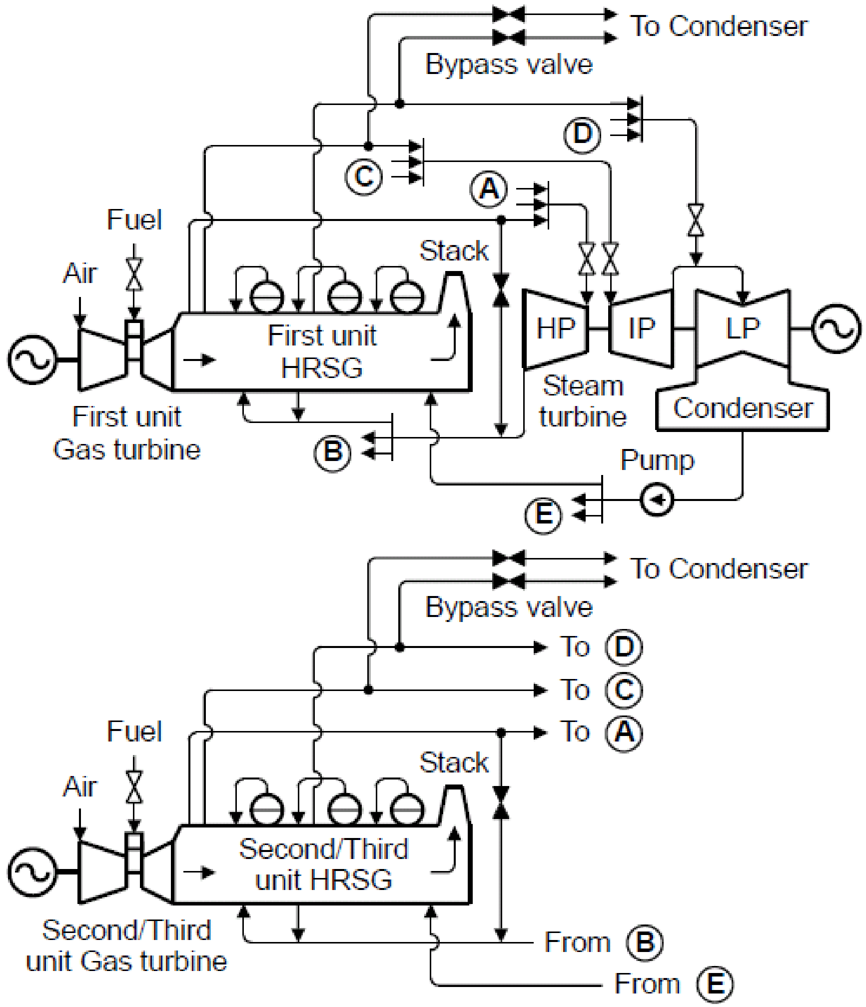


Fig. 1 Plant configuration

制御ルール

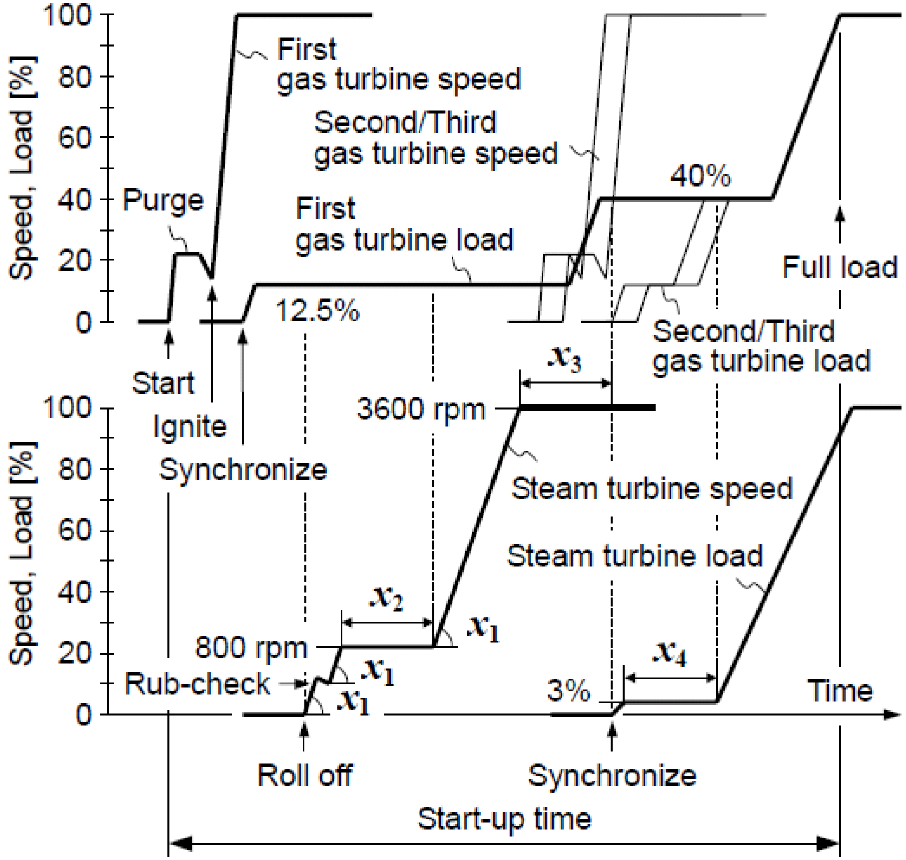


Fig. 2 Plant start-up schedule

$$x_1 \in \{120\ \mathrm{rpm/min}, 180\ \mathrm{rpm/min}, 360\ \mathrm{rpm/min}\}$$

$$5\ \mathrm{min} \le x_2 \le 60\ \mathrm{min}$$

$$0\ \mathrm{min} \le x_3, x_4 \le 60\ \mathrm{min}$$

近似最適化が必要な理由

- 実機での検証は不可能
- シミュレーションには2～3時間必要
  - 繰り返し計算をしている間に機会を失う
- ユーザが意思決定に使える時間は数分以内

近似の精度

- 250データを予め用意.
- 200データを学習データとして，50データを検証用とする.

近似の精度

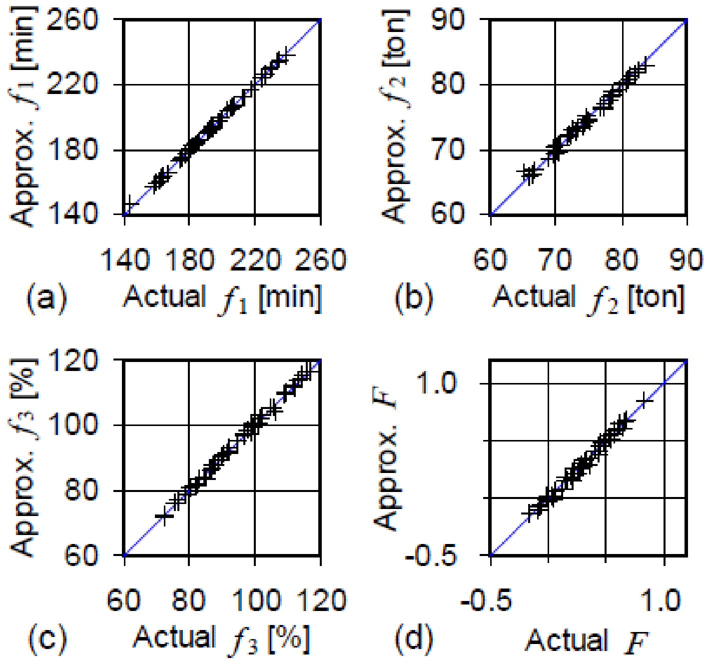


Fig. 7 Results of the RBFN models

Table 1 Approximation errors of the RBFN models

Error	f_1	f_2	f_3, g_{c1}	g_{c2}
Average	0.13%	0.49%	0.58%	0.21%
Maximum	1.43%	2.14%	1.92%	0.58%

多目的最適化の結果

Table 2 Results of the objective functions

	f_1	f_2	f_3
Aspiration level #1	200 min	74.4 ton	94.9%
Solution (RBFN) #1	175 min	71.6 ton	88.5%
Solution (Actual) #1	175 min	71.9 ton	87.7%
Aspiration level #2	160 min	70.0 ton	92.8%
Solution (RBFN) #2	162 min	70.3 ton	93.6%
Solution (Actual) #2	161 min	69.8 ton	92.3%
Aspiration level #3	160 min	67.0 ton	100%
Solution (RBFN) #3	156 min	67.9 ton	100%
Solution (Actual) #3	156 min	67.6 ton	100%

多目的最適化の結果

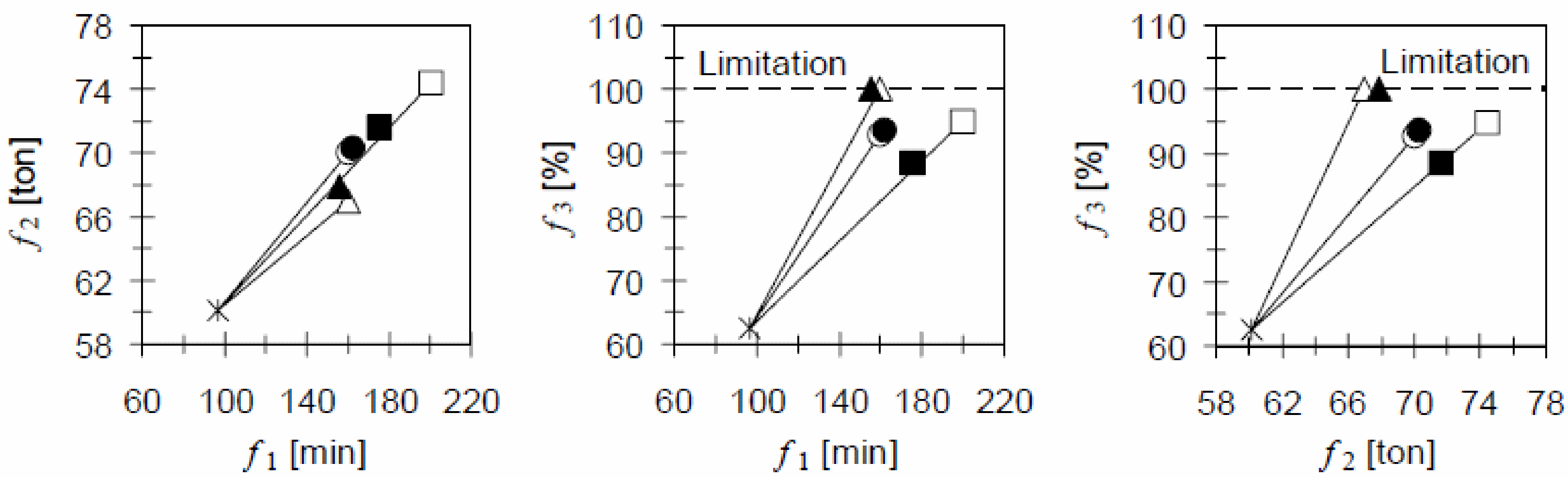


Fig. 8 Results of the multi-objective optimization processes

多目的最適化の結果
（初期状態の運転）

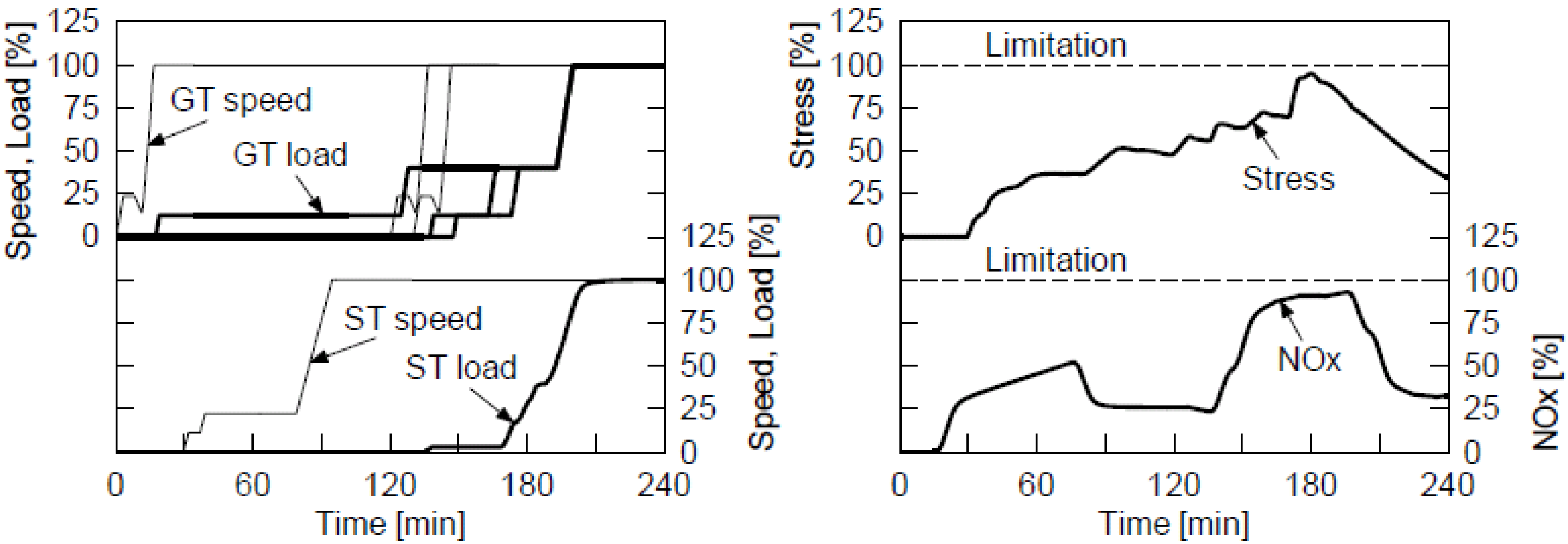
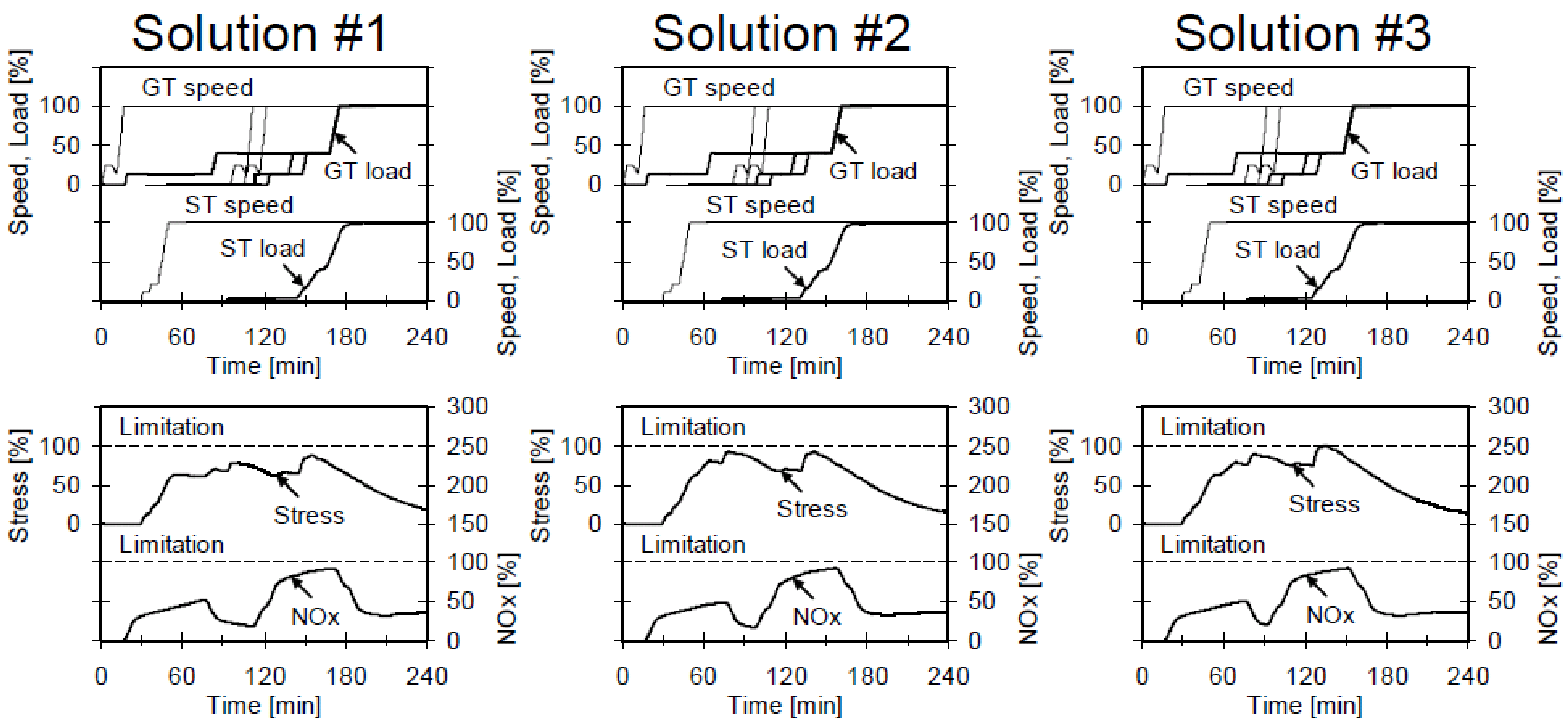


Fig. 9 Initial start-up schedule corresponding to the first aspiration level

多目的最適化の結果



Solution #1
Solution #2
Solution #3
GT speed
GT load
ST speed
ST load
Speed, Load [%]
Time [min]
Limitation
Stress
NOx
Stress [%]
NOx [%]

DEAによる結果の検証

Table 2　Results of the objective functions

	f_1	f_2	f_3
Aspiration level #1	200 min	74.4 ton	94.9%
Aspiration level #3	160 min	67.0 ton	100%
Solution (RBFN) #3	156 min	67.9 ton	100%
Solution (Actual) #3	156 min	67.6 ton	100%

	Solution #1	Solution#2	Solution #3
Efficiency:	0.998	1.013	1.005
Start-up time:	0	0.414	0
Fuel consumption rate:	0.329	0	1.005
Thermal stress:	0.669	0.598	0