

Analysis of Elastic Impact System Composed of a Ball and Walls

正 本江 哲行(富山高専) 正 佐藤 秀紀(金沢大) 正 岩田 佳雄
正 小松崎 俊彦 学 本郷 陽子

Tetsuyuki HONGO, Toyama National College of Tecnology, 13 Hongo Toyama

Hidenori SATO, Kanazawa University, 2-40-20 Kodatsuno Kanazawa

Yoshio IWATA, Kanazawa University

Toshihiko KOMATSUZAKI, Kanazawa University

Yoko HONGO, Kanazawa University

This paper deals with modeling and analysis of elastic impact system. In analysis of impact system, an analytical model with considering duration of impact and energy loss is not generally used. It is necessary an analytical model with considering duration of impact and energy loss in order to quantitatively.

In this paper, We are concerned with elastic impact system composed a ball and walls. A impact model considering duration of impact and energy loss is proposed. On the modeling, elastic restoring force and damping force are considered as impact force. Elastic restoring force is shown in non-liner spring. Damping force is shown in non-liner dashpot. Elastic restoring force is expressed by Hertz's contact theory. Damping force is assumed to be proportion to velocity. Equivalent damping coefficient is given from the coefficient of restitution that is defined by velocity ratio before and after of the ball. It compares with experimental results and an properly of the model and calculation method were examined.

Key Word : Modeling, Energy loss of impact, Duration of impact, Non-liner spring and non-liner dashpot, Impact, Numerical simulation

1. 緒 言

カオス問題も含め衝突問題について多くの研究が行われているが、一般的に衝突の取り扱い、衝突時間を0または一定とし、衝突時のエネルギー損失は、反発係数を用いた衝突前後の速度変化に置き換えて解析している^{(1),(2)}。実際の衝突現象、特に、剛性の低い系や材料において、衝突時間とエネルギー損失を考慮した解析が必要である。これらを考慮した研究としては、復元力特性に履歴特性を考慮した数値解析⁽³⁾や、衝突系の各パラメータ(ばね定数, 減衰係数)を実験による衝突波形と履歴特性から、衝突系をフォークトモデルや3要素モデル^{(4)~(6)}でモデル化した解析などがあるが、各パラメータ(ばね定数, 減衰係数)と衝突系の形状や材質の関係が不明確なことより定性的な解析結果となっている。また、球と平面の衝突現象に対して、衝突物体の形状と材質を考慮してHertzの接触理論⁽⁷⁾を用いた弾性復元力を定義し、解析を行った研究^{(6),(8)~(10)}もあるが、減衰力の定義に問題があり、実験結果と異なり定量的解析が困難であった。

そこで、本研究では、球弾性衝突系について、弾性力をHertzの接触理論による非線形ばねで示し、減衰力を非線形ばねの等価剛性を考慮した非線形ダッシュポットでモデル化し、丸棒が半球上に自由落下する衝突現象について数値シミュレーションを行った。そして、実験結果と比較し、衝突系のモデルと計算方法の妥当性を検討した。

2. 解析方法

2・1 数値シミュレーション方法 質量 m の丸棒が高さ h から半球に自由落下し、衝突した場合、衝突時に丸棒に働く力としては、衝突による接触力と重力を考えれば、丸棒の運動方程式は

$$\ddot{u} = \frac{P}{m} + g \quad (1)$$

と表すことができ、ここで、 P は接触力の総和、 g は重力加速度、 u は高さ h を原点とし、下向きを正とした場合の丸棒の変位とする。式(1)の加速度を時間 t で近似積分することにより、丸棒の速度と位置を計算し、この計算を各時間ステップごとに繰り返すことにより運動を求める。

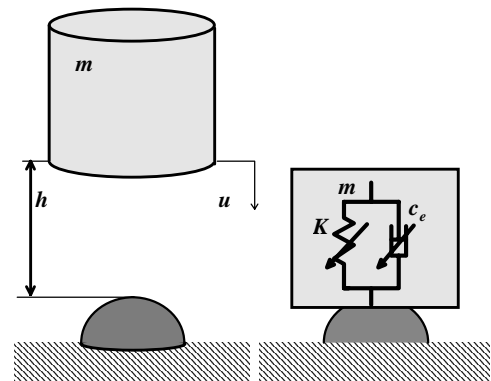


Fig.1 Analytical model

2・2 衝突系のモデル化 衝突の時に平面（丸棒）と半球に働く衝突力を図1に示すように、非線形ばねと非線形ダッシュポットでモデル化する。衝突力は、弾性復元力と減衰力の総和とし、弾性復元力に、Hertzの接触理論、減衰力に等価粘性減衰力を考え、法線方向の相対変形量 x を用いると次式で表される。

$$P = -(Kx^{3/2} + c_e \dot{x}) = -(k_e x + c_e \dot{x}) \quad (2)$$

ここで、 K は、ばね係数で球の半径 R 、ポアソン比 ν 、縦弾性係数 E を用いて次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$K = \frac{4\sqrt{R}}{3} \left(\frac{1-\sigma_s^2}{E_s} + \frac{1-\sigma_w^2}{E_w} \right)^{-1} \quad (3)$$

ここで、添え字の s は半球、 w は平面を示す。式から分かるようにばね係数は物性値である縦弾性係数とポアソン比などから求めることができる。

丸棒と半球が衝突する場合、式(2)の x は図2に示すように丸棒と半球の法線方向の変位量で、半球の高さと丸棒端面までの距離から次式のように表す。

$$x = b - d \quad (4)$$

衝突時のエネルギー消費を、図3に示すように丸棒の衝突直前の速度と衝突直後の速度の変化が、1自由度の粘性減衰系の1/2サイクルの速度変化に相当すると考えると、等価粘性減衰係数は反発係数を用いて次式のように表される。

$$c_e = \frac{2k_e \zeta}{\omega_n} = \frac{2K|x|^{1/2} \zeta}{\omega_n} \quad (5)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{e^2} \quad (6)$$

ここで、 k_e は等価ばね定数、 ζ は粘性減衰比を示す。 ω_n は、衝突時間が系の半周期に相当する場合の固有振動数を示す。非線形ばねの場合、線形のような $\omega_n = \sqrt{k/m}$ の関係が成り立たないため、 ω_n を接触系の固有振動数から求める。平面が常に球に接触した状態で定常加振を受ける場合、系の応

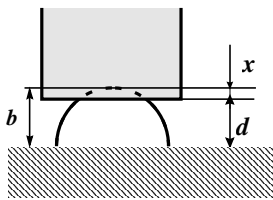


Fig.2 Deformation due to impact

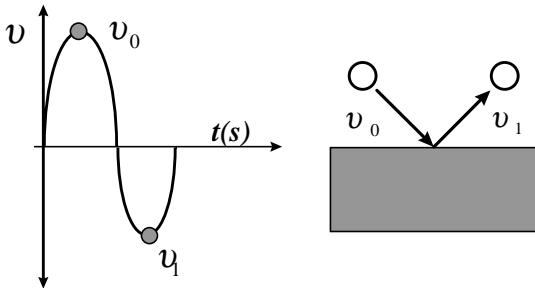


Fig.3 Analogy between impact and free vibration in velocity change

答は厳密には正弦的にならないが近似的に、振幅 X_0 の調和振動とする。

$$x' = X_0 \cos \omega t \quad (6)$$

減衰がない場合、最大運動エネルギーと最大ひずみエネルギーの関係式から

$$\frac{1}{2} m (X_0 \omega_n)^2 = \frac{2}{5} K X_0^{5/2} \quad (7)$$

となり、この関係式から接触系の固有振動数 ω_n は、次式のように表される。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4K}{5m}} X_0^{1/2} \quad (8)$$

この式より、振幅により固有振動数が変化することが分かる。ここで、接触系の振幅 X_0 と衝突時の最大変位 X_{max} とが等しいと考えると ω_n は、次式となる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4K}{5m}} X_{max}^{1/2} \quad (9)$$

ここで、 ω_n は衝突速度に依存することが考えられることから、衝突速度 v_0 と最大変位 X_{max} との関係を定義する。衝突中の最大ひずみエネルギーが衝突前後の運動エネルギーの平均値であると仮定し、反発係数 e を用いて次式で表す。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 e^2 \right) = \frac{2}{5} K X_{max}^{5/2} \quad (10)$$

式(10)より ω_n は次のように表される。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4K}{5m} \left(\frac{5m v_0^2 (1+e^2)}{8K} \right)^{1/5}} \quad (11)$$

式(11)を式(5)に代入することにより、非線形ばねの等価粘性減衰係数は次のように定義できる。

$$c_e = 2K|x|^{1/2} \zeta \left(\sqrt{\frac{4K}{5m} \left(\frac{5m v_0^2 (1+e^2)}{8K} \right)} \right)^{-1} \quad (12)$$

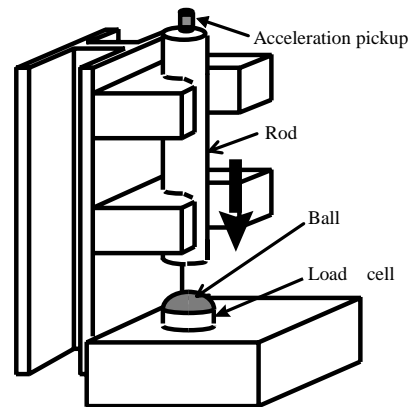


Fig.4 Experiment apparatus

3. 衝突実験と数値シミュレーション

3.1 衝突実験 本研究に用いた衝突実験装置の概略を図4に示す。実験装置は、衝突速度の制御が容易な自由落下法を基本とする。図に示すようにベース上にロードセルを固定し、その上に質量の小さい半球を取り付けた。そして、質量の大きい平面(丸棒)を自由落下させ、衝突力と衝突変位を測定する。衝突中の変位、衝突中の速度は、丸棒端面に取り付けた加速度ピックアップから測定した加速度を積分することにより求める。衝突力は、半球下の圧電型ロードセルで測定する。実験に用いた丸棒の形状寸法と質量を表1に示す。表2,3には、簡単な実験から求めた縦弾性係数と反発係数を示す。縦弾性係数は固有振動数から、反発係数は実験装置を用いて丸棒を自由落下させ、衝突時間間隔から求めた。

3.2 実験と数値シミュレーションの比較 実験と数値シミュレーションは、ナイロン半球とスチール丸棒、3種類のジュラルミン丸棒の各落下高さにおける衝突について行った。数値シミュレーションに用いる反発係数 e は実験値を用い、非線形ばね係数 K は表3に示すカタログ値から計算したばね係数を用いた。スチール丸棒とジュラルミン丸棒の落下高さ $h = 20\text{ mm}$ における衝突力、衝突変位、履歴特性、衝突速度、衝突加速度の実験と数値シミュレーション結果の比較を図5, 図6に示す。両丸棒とも、衝突加速度の実

Table 1 Form dimension

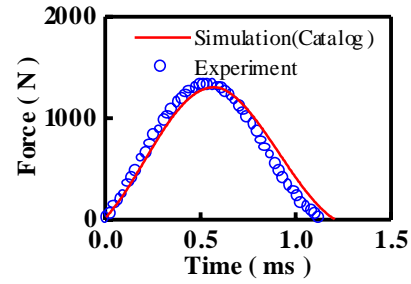
	Dimension (m)	mass (kg)	
Nylon ball	0.0254 × 0.019	0.0078	
Steel rod	0.0250 × 0.200	0.778	
Duralumin rod	A	0.0250 × 0.100	0.137
	B	0.0250 × 0.150	0.205
	C	0.0250 × 0.200	0.274

Table 2 Coefficient of restitution

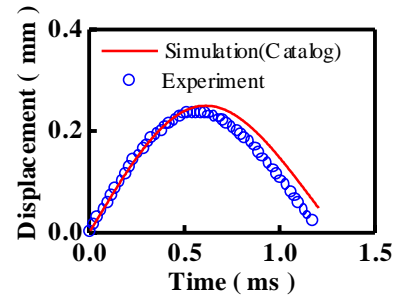
		$e (\zeta)$	
Nylon ball : Steel rod		0.795(0.07)	
Nylon ball : Duralumin rod	A	0.828(0.06)	0.834(0.06)
	B	0.846(0.05)	
	C	0.828(0.06)	

Table 3 Mechanical properties

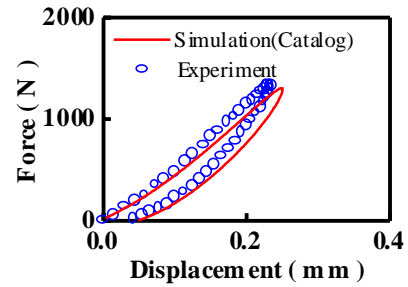
		Natural Frequency (KHz)	Young's modulus (GPa)
Nylon ball			1.2 ~ 2.9 (Value from catalog)
Steel rod		112.9	204.0
Duralumin rod	A	9.88	54.8
	B	4.71	63.2
	C	2.74	67.4



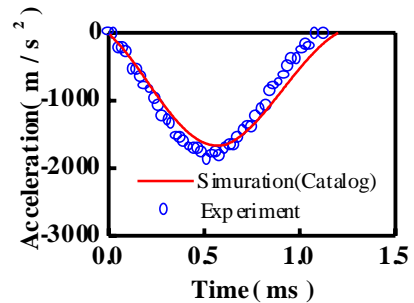
(a) Force of impact



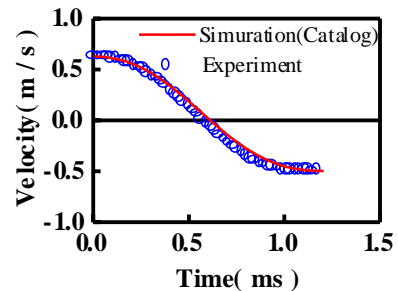
(b) Displacement of impact



(c) Hysteresis loop



(d) Acceleration of impact



(e) Velocity of impact

Fig.5 Comparison of experimental and simulation result (Steel rod :h=20mm)

験値には、丸棒の縦振動による高周波成分が含まれるが、衝突変位、衝突力、履歴とも、最大値などは、多少異なるが、数値シミュレーションと実験値は、ほぼ一致しており、従来の研究結果より定量的な解析結果となっている。また、数値シミュレーションと実験結果の差は、計算において、ナイロン球の縦弾性係数にカタログ値を用いていることと、計測誤差によるものと考えられる。

以上のことより、本研究で提案した衝突モデル、計算方法は、妥当であり、反発係数が衝突速度に依存しない衝突系で、衝突物体が弾性体である場合、衝突物体の材質と質量の変更に対応でき、定量的な解析が可能である。

4. 結 言

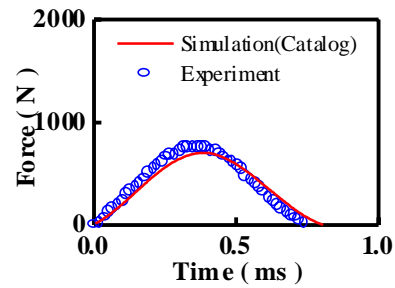
球と平面からなる衝突系を非線形ばねと非線形ダッシュポットでモデル化し数値シミュレーションを行い、実験と比較し、衝突系のモデルと計算方法の妥当性を検討した結果、以下の結論を得た。

(1) 定義した衝突モデルの非線形ばね係数、非線形減衰係数は、縦弾性係数、ポアソン比等の物性値と簡単な実験から求められる反発係数を用いて計算が可能である。

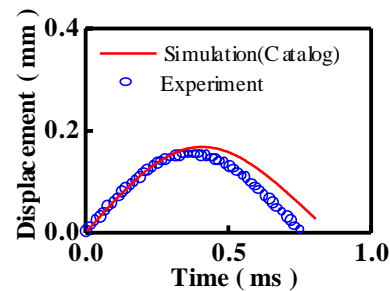
(2) 提案した衝突モデル、計算方法は、妥当であり、反発係数が衝突速度に依存しない衝突系で、衝突物体が弾性体である場合、衝突物体の材質と質量の変更にも対応でき、定量的な解析が可能となった。

文献

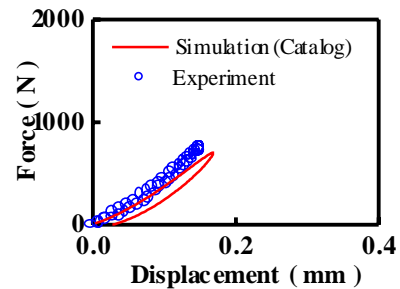
- (1) 小寺忠, 振動衝突に関する理論研究, 機論, 36-286, (1970), 923
- (2) 吉武裕・末岡淳男, インパクトダンパによる自励振動の防振, 機論, 60-569, C(1994), 50
- (3) 青木繁・渡辺武, 非対称履歴特性を有する連族体の強制振動, 機論, 63-610, C(1997), 1855
- (4) 宇治橋貞幸・平原康晴・他2名, ゴルフ・ボールの反発特性の計測と評価, 機論, 60-577, C(1994), 3150
- (5) 坂田勝・遠藤満・他2名, 鋼球による粘弾性体の衝撃, 機論, 46-411, C(1980), 1364
- (6) 遠藤満・岡智彦, ガタ支持部をもつはり振動系の不規則応答, 機論, 52-477, C(1986), 1520
- (7) Timoshenko, S.P (金多訳), 弾性論, (1973), 423, コロナ社
- (8) K.H.Hunt・F.R.E.Crossley, Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact, Trans. ASME, J. Appl. Mech. (Ser. E), 42, 2, (1975), 440
- (9) 藤田隆史・服部忍, 周期衝突振動における衝撃特性, 機論, 45-395, C(1979), 737
- (10) 斎藤俊・松田勉・遠藤満, 柱体用衝撃ダンパの制振効果, 機論, 60-571, C(1994), 824



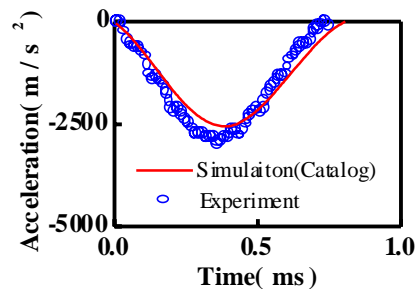
(a) Force of impact



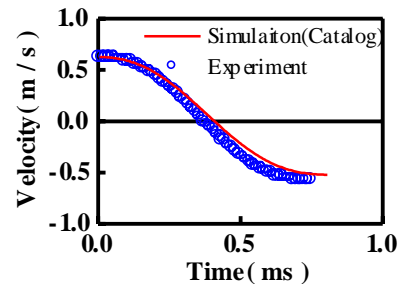
(b) Displacement of impact



(c) Hysteresis loop



(d) Acceleration of impact



(e) Velocity of impact

Fig.6 Comparison of experimental and simulation result (Duralumin rod C :h=20mm)