

# FRPシートにより補強された柔軟構造物のロバスト設計

## Robust Design of a Flexible Structure Reinforced by FRP Sheet

正 中西 光章 (北大院)    正 小林 幸徳 (北大)    正 山田 元 (北大)

Mitsuaki NAKANISHI, Hokkaido University, N13W8, Sapporo

Yukinori KOBAYASHI, Hokkaido University

Gen YAMADA, Hokkaido University

This paper presents a robust design method of a flexible structure reinforced by FRP sheets. A FRP sheet has a high ratio of strength to weight and is widely used as a stiffener of structure in various fields. Vibration characteristics of the structure reinforced by FRP sheets can be easily modified by changing design variables such as the relative volumes of fibers and matrix, the fiber angle and the number of layers. Therefore small variation of design variables gives rise to drastic change of the vibration characteristics. In this paper, the attention is focused on the variation of modulus of longitudinal elasticity of the structure reinforced by FRP sheets. We propose a constrained condition that can take into account the variation band of the elasticity of the structure and specify the total variation of natural frequencies of low order modes. For the purpose of maximization of natural frequencies, the design variables are determined by using optimization technique under this condition. The validity of the present method is verified by numerical examples and by comparison with results of experiments.

**Key Words :** Flexible Structure, Free Vibration, Optimum Design, Composite Material

近年、既存の土木構造物や建築構造物などへの補強方法として、炭素繊維シートを常温で硬化するエポキシ樹脂を用いて接着するという方法が注目を集めている。炭素繊維シートによる補強は現場での施工性に優れ、比強度、比剛性が高く、繊維含有率、板厚、接着長さ、繊維配向角など多くの設計変数を有するため、高い機能性を満たす設計が可能であり、多くの研究がなされている<sup>(1)</sup>。本研究ではこの特徴を生かし、振動特性の最適化を目的として、既存の金属からなるはり構造物への適用を試みる。過去には、類似の構造として、等方性材料からなるステップ変厚はりや板に関する研究<sup>(2)~(5)</sup>は数多くなされている。しかしながら、基本となるはりと異なる材料、しかも異方性を有する材料が貼付された場合の振動解析は見当たらない。本研究では、スチールはりにFRPシートを貼付した変厚ステップはりの自由振動をリッツ法によって解析する。その際、断面が変化する位置での、変位とたわみ角の連続性を満足した変位関数を用い、実験との比較を行ってモデリングの検証を行う。

また、機械構造物の動的設計において固有振動数の値を設計の段階で指定することは重要である。しかしながら、炭素繊維シートによる補強は多くの設計変数を有する反面、理論通りに施工することは難しく、これらの設計変数には製作誤差が考えられる。特に問題となるのはエポキシ樹脂の縦弾性係数と繊維含有率であり、これによって補強材の縦弾性係数が大きく変化し、振動数も大きく変動することになる。本研究ではこの問題に対しロバスト設計手法<sup>(6),(7)</sup>を用いて振動数を最大化する設計変数を決定する。補強材の縦弾性係数の変動幅を考慮し、設計の段階で着目する低次の振動数の変動の総和を百分率で指定できる次式を制約

条件として用いる。

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\omega_i} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial E_f} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial E_f^2} \Delta E_f \right) \times 100 \leq \frac{\gamma}{\Delta E_f} \quad (A1)$$

ここで  $\omega_i, E_f, \Delta E_f, \gamma$  は、それぞれ  $i$  次固有振動数、補強材の縦弾性係数、縦弾性係数の変動幅、固有振動数の誤差の許容値である。そして、この制約条件の下、振動数を最大化する設計変数を最適化手法を用いて決定し、実験を行い本研究の有効性を検証した。

表には  $\gamma = 1$  として、ロバスト設計手法によりFRP補強された片持はりの、計算結果(sim.)と実験結果(exp.)の固有振動数を  $p = 2\pi\omega$  で示す。FRPシートで、補強する前のスチールのみから成る初期設計構造物の固有振動数は  $p_1 = 1.98\text{Hz}, p_2 = 12.4\text{Hz}, p_3 = 34.8\text{Hz}, p_4 = 68.3\text{Hz}$  である。実験において二つ製作したのは、再現性を検討するためである。表より、計算結果と実験結果の誤差の総和は、1%以下となり、製作誤差の影響を受けずに、補強が行えている。また、実験結果より再現性も十分にあり、本研究の有効性が確認できた。

Table A1 Results of robust design

	sim.	exp.	
$p_1$ (Hz)	2.75	2.75	2.73
$p_2$ (Hz)	17.2	17.2	17.2
$p_3$ (Hz)	48.2	48.1	48.1
$p_4$ (Hz)	94.4	94.0	94.3
total error(%)		-0.63	-1.0

# 1. モデリング

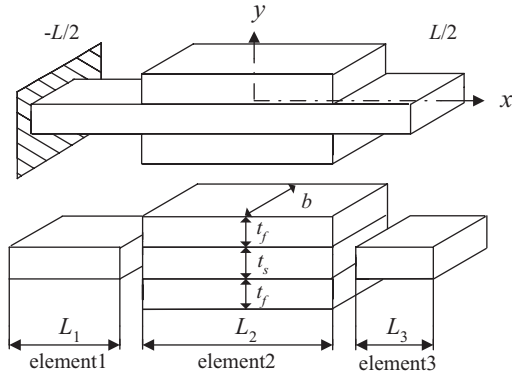


Fig. 1 Cantilever beam model

本研究では図1に示す長さ  $L$ 、幅  $b$  のFRP補強された片持はりを対象とする． $x$  軸を図心と一致させ、原点をはりの中心にとる．断面が変化する位置ではりを分割して考え、固定端から要素1, 2, 3とする．要素2のみがシートにより補強され、それぞれの長さを  $L_1, L_2, L_3$  とする．また、 $t, E, \rho$  は厚さ、縦弾性係数、密度であり、添え字の  $s, f$  はそれぞれスチール、FRPシートを表す．各要素の横変位を  $W_1, W_2, W_3$  とし、幾何学的境界条件を満足する次の二つの変位関数を提案する．

・変位、たわみ角の連続性

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= \sum_{i=0}^m a_i x^i (x + L/2)^2 \\
 W_2(x) &= \sum_{i=0}^m b_i x^i (x + L/2 - L_1)^2 \\
 &+ W_1|_{x=-L/2+L_1} \\
 &+ (x + L/2 - L_1)W_{1,x}|_{x=-L/2+L_1} \\
 W_3(x) &= \sum_{i=0}^m c_i x^i (x - L/2 + L_3)^2 \\
 &+ W_2|_{x=L/2-L_3} \\
 &+ (x - L/2 + L_3)W_{2,x}|_{x=L/2-L_3}
 \end{aligned} \tag{1}$$

・変位、たわみ角、モーメント、せん断力の連続性

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= \sum_{i=0}^m a_i x^i (x + L/2)^2 \\
 W_2(x) &= \sum_{i=0}^m b_i x^i (x + L/2 - L_1)^4 \\
 &+ W_1|_{x=-L/2+L_1} \\
 &+ (x + L/2 - L_1)W_{1,x}|_{x=-L/2+L_1} \\
 &+ \frac{D_1}{D_2} \frac{(x + L/2 - L_1)^2}{2} W_{1,xx}|_{x=-L/2+L_1} \\
 &+ \frac{D_1}{D_2} \frac{(x + L/2 - L_1)^3}{6} W_{1,xxx}|_{x=-L/2+L_1} \\
 W_3(x) &= \sum_{i=0}^m c_i x^i (x - L/2 + L_3)^4 \\
 &+ W_2|_{x=L/2-L_3} \\
 &+ (x - L/2 + L_3)W_{2,x}|_{x=L/2-L_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{D_2}{D_3} \frac{(x - L/2 + L_3)^2}{2} W_{2,xx}|_{x=L/2-L_3} \\
 &+ \frac{D_2}{D_3} \frac{(x - L/2 + L_3)^3}{6} W_{2,xxx}|_{x=L/2-L_3}
 \end{aligned} \tag{2}$$

式(1)は、断面が変化する位置で、変位とたわみ角の連続性を満足しており、式(2)では、それに加えて、モーメントとせん断力の連続性を満足している．ここで各係数  $a_i, b_i, c_i$  は未定係数、 $W_{j,x}$  は  $x$  による偏微分であり、 $D_1, D_2, D_3$  は曲げ剛性で

$$\begin{aligned}
 D_1 &= D_3 = \frac{1}{12} E_s b t_s^3 \\
 D_2 &= \frac{1}{12} E_s b t_s^3 + \frac{2}{3} E_f b \left\{ \left( \frac{t_s}{2} + t_f \right)^3 - t_f^3 \right\}
 \end{aligned}$$

となる．自由振動を考え、その面外変位  $w(x, t)$  を

$$w(x, t) = W_j(x) \sin(\omega t) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

と表すと、はりに蓄えられるひずみエネルギーと運動エネルギーの最大値は式(4), (5)となる．

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \left( D_1 \int_{-L/2}^{-L/2+L_1} W_{1,xx}^2 dx \right. \\
 &+ D_2 \int_{-L/2+L_1}^{L/2-L_3} W_{2,xx}^2 dx \\
 &+ D_3 \int_{L/2-L_3}^{L/2} W_{3,xx}^2 dx \left. \right) \\
 T &= \frac{1}{2} \omega^2 \left( m_1 \int_{-L/2}^{-L/2+L_1} W_1^2 dx \right. \\
 &+ m_2 \int_{-L/2+L_1}^{L/2-L_3} W_2^2 dx \\
 &+ m_3 \int_{L/2-L_3}^{L/2} W_3^2 dx \left. \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで  $\omega$  は円振動数、 $m_1, m_2, m_3$  は単位長さ当たりの質量であり、

$$\begin{aligned}
 m_1 &= m_3 = \rho_s t_s b \\
 m_2 &= \rho_s t_s b + 2\rho_f t_f b
 \end{aligned}$$

となる．式(1), あるいは式(2)を式(4), (5)へ代入し、ラグランジュ関数  $L = T - U$  の停留条件式

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial L}{\partial c_i} = 0 \tag{6}$$

を用いることにより振動数方程式

$$[[\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]] \{\mathbf{X}\} = 0 \tag{7}$$

が得られる．ここで  $M$  は質量マトリクス、 $K$  は剛性マトリクスであり、紙面の都合上詳細は省略する．この式の固有値を求めることにより、FRP補強された片持はりの固有振動数が決まり、それに対応する固有ベクトル  $X$  を求めることにより式(1), (2)から、それぞれ固有関数が決定される．

一方、はりの横変位を次式

$$W(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i (x + L/2)^2 \tag{8}$$

のように断面が変化する位置で分割せず，幾何学的境界条件を満足した一つの関数で近似した場合についても検討を行う．固有振動数，固有ベクトルは上述した方法により，同様に求められる．

## 2. モデリングの検証

実験により，前節で提案した変位関数の違いによるモデリングの検討を行う．まず，FRPシートを有するはりの製作法を示す．本研究では，土木構造物の補強材として使われている（株）日鉄コンポジット製の炭素繊維トウシート（FTS-C1-20）を用いる．炭素繊維を所定の大きさに切り，スチール表面に母材であるエポキシ樹脂を塗布する．炭素繊維を塗布面に貼付け，ローラを用いて繊維方向に沿って4～5回しごき，樹脂を含浸させエアーを除去し，数時間常温で放置して製作する．また，繊維方向は，はりの長手方向と一致させる．図2に示す実験装置を用い，実験を次のように行う．発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して電磁石に入力する．正弦波は波形が正と負の半波に分離され，二つの電磁石を交互に励磁することによって，はりを加振する．先端の振動はレーザ変位計を用いて計測し，レーザ変位計の出力をA/Dボードを介してパーソナルコンピュータに取り込む．そして加振周波数を変化させて周波数応答を計測し，一次から四次モードまでの固有振動数を求める．

$b = 30\text{mm}$ ， $L_1 = 0\text{mm}$ ，FRPシートで補強された部分を $L_2 = 450\text{mm}$ で一定とし， $L_3$ を200mmから50mmずつ変化させて振動実験を行った．製作したはりの諸元を表1に示す．表2には実験結果を，表3，4，5はそれぞれ変位関数に式(1)，(2)，(8)を用いたときの計算結果を $p = 2\pi\omega$ で示す．級数の項数 $m$ をそれぞれ固有値の収束状況より判断し8，8，20とした．また表1におけるFRPシートの縦弾性係数は， $L_3 = 0\text{mm}$ としたとき，つまりFRPシートにより固定端から自由端まで補強された一様はりの固有振動数の実験値と計算結果が一致するように決定した．この場合，一様はりであるため変位関数はどれを用いても同じになり，計算結果もそれぞれ一致する．また，表中の括弧内には実験値との誤差を百分率で示す．表3，4の固有振動数は全て5桁以上で一致し，実験と比べて誤差は $\pm 2\%$ 以内に収まっている．固有関数を分割せずに，一つの関数で近似した式(8)を用いた場合，実験結果と大きな誤差が生じている．特に実験値との誤差が大きかった $L_3 = 200\text{mm}$ の二次モードについて以下に考察を行う．

図3に $L_3 = 200\text{mm}$ としたときの変位，たわみ角，モーメント，せん断力をそれぞれ示す．変位，たわみ角は先端

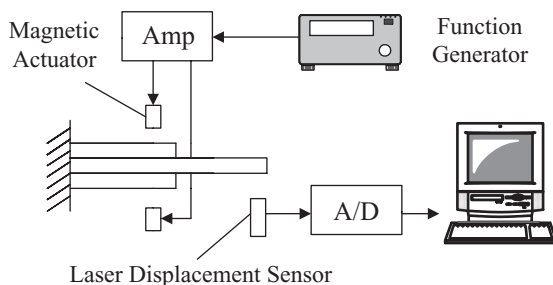


Fig. 2 Experimental setup

Table 1 Specification of the steel beam and FRP

$E_s$	206GPa	$E_f$	93.4GPa
$\rho_s$	$7.86 \times 10^3 \text{kg/m}^3$	$\rho_f$	$1.50 \times 10^3 \text{kg/m}^3$
$t_s$	0.60mm	$t_f$	0.65mm

Table 2 Experimental results

$L_3(\text{mm})$	200	150	100	50	0
$p_1(\text{Hz})$	4.18	4.97	5.79	6.80	7.94
$p_2(\text{Hz})$	15.9	22.8	33.0	42.7	49.8
$p_3(\text{Hz})$	43.0	50.9	69.1	114.2	139.4
$p_4(\text{Hz})$	85.6	113.1	135.5	201.1	270.0

Table 3 Analytical results using equation (1)

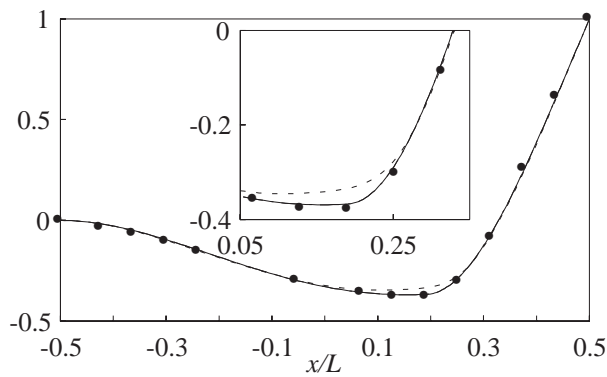
$L_3(\text{mm})$	200	150	100	50	0
$p_1(\text{Hz})$	4.21 (0.7)	4.96 (-0.2)	5.82 (0.5)	6.81 (0.1)	7.97 (0.4)
$p_2(\text{Hz})$	16.1 (1.3)	22.8 (0.0)	32.7 (-0.9)	41.9 (-1.9)	49.9 (0.2)
$p_3(\text{Hz})$	42.6 (-0.9)	50.5 (-0.8)	69.8 (1.0)	113.4 (-0.7)	139.8 (0.3)
$p_4(\text{Hz})$	86.1 (0.6)	112.6 (-0.4)	134.5 (-0.7)	203.5 (1.2)	274.0 (1.5)

Table 4 Analytical results using equation (2)

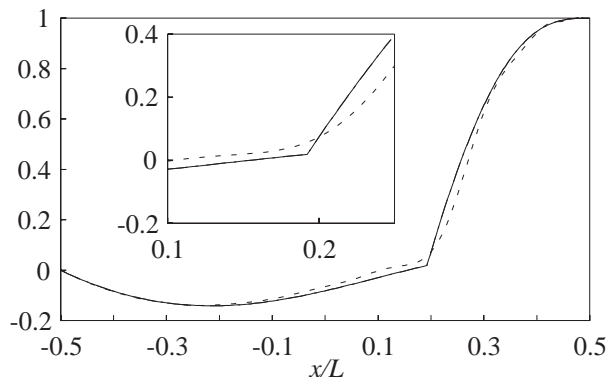
$L_3(\text{mm})$	200	150	100	50	0
$p_1(\text{Hz})$	4.21 (0.7)	4.96 (-0.2)	5.82 (0.5)	6.81 (0.1)	7.97 (0.4)
$p_2(\text{Hz})$	16.1 (1.3)	22.8 (0.0)	32.7 (-0.9)	41.9 (-1.9)	49.9 (0.2)
$p_3(\text{Hz})$	42.6 (-0.9)	50.5 (-0.8)	69.8 (1.0)	113.4 (-0.7)	139.8 (0.3)
$p_4(\text{Hz})$	86.1 (0.6)	112.6 (-0.4)	134.5 (-0.7)	203.5 (1.2)	274.0 (1.5)

Table 5 Analytical results using equation (8)

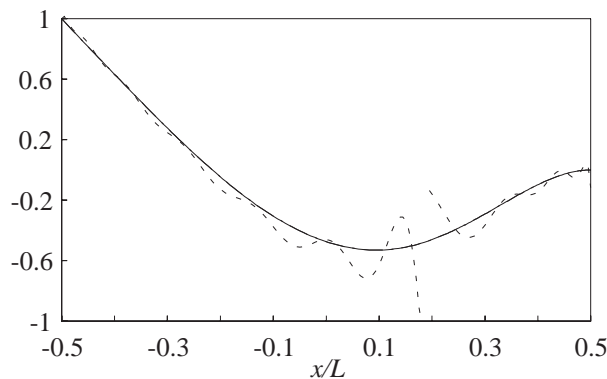
$L_3(\text{mm})$	200	150	100	50	0
$p_1(\text{Hz})$	4.25 (1.7)	4.98 (0.2)	5.82 (0.5)	6.81 (0.1)	7.97 (0.4)
$p_2(\text{Hz})$	17.1 (7.5)	24.2 (6.1)	33.6 (1.8)	42.0 (-1.6)	49.9 (0.2)
$p_3(\text{Hz})$	42.7 (-0.7)	51.8 (1.8)	74.9 (8.4)	114.9 (0.6)	139.8 (0.3)
$p_4(\text{Hz})$	90.8 (6.1)	113.6 (0.4)	136.3 (0.6)	213.8 (6.3)	274.0 (1.5)



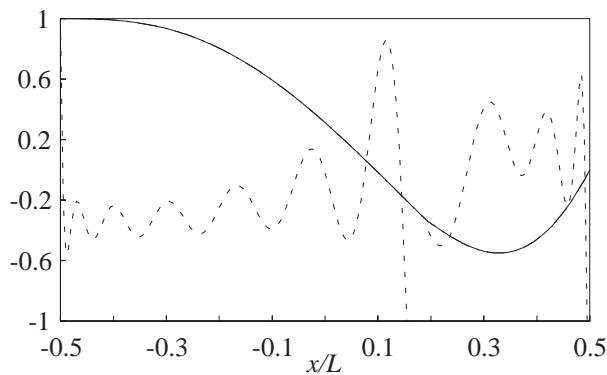
(a) displacement



(b) slope



(c) moment



(d) shear force

— eq.(1)      - - - eq.(2)  
 ····· eq.(8)      ● exp.

Fig. 3 Characteristics of the second mode  
 ( $L_3 = 200\text{mm}$ )

での値を1とし、モーメント、せん断力に関しては固定端を1とし、正規化を行った。実線、一点鎖線、破線はそれぞれ、変位関数を式(1)、(2)、(8)とした場合である。また、変位については実験による計測を行い、●により図中に示す。式(1)は変位とたわみ角の連続性しか保証していないにもかかわらず、断面が変化する位置において、モーメントとせん断力の連続条件も精度よく満たし、式(2)の場合と比較して、変位、たわみ角、モーメント、せん断力も有効数字5桁の範囲で一致している。変位を一つの関数で近似した式(8)を用いた場合、断面が変化する位置において変位とたわみ角は連続となるが、モーメントとせん断力は曲げ剛性が変化するため不連続となり、大きく異なっている。また、図3(a)より、式(1)、(2)は実験と非常によく一致しているが、式(8)とは、特にFRPシートの先端位置である  $x/L = 0.19$  近傍において、顕著な違いが認められる。シートの先端で曲げ剛性が  $D_2$  から  $D_3$  に大きく変化するため、その位置がモードの腹の位置と一致した場合、図3(b)をみてわかるように、たわみ角が急激に変化する。

式(8)のように一つの関数を用いると、FRPシート先端での急激なたわみ角の変化を近似できず、また、モーメントとせん断力が不連続となるため、固有振動数において大きな誤差を生ずる。これは、リッツ法に用いる試験関数は幾何学的境界条件を満足する必要があるが、式(8)は、はり両端においては幾何学的境界条件を満足しているものの、FRPシートの先端部における境界条件が十分に表現されていないためと考えられる。一方、式(1)の結果が式(2)の結果と差が生じず、実験と非常によく一致したのは、変位を分割し、シート先端部での幾何学的境界条件を保証することにより、急激なたわみ角の変化を近似でき、力学的連続条件も精度よく満たすためであると考えられる。よって、次節からの計算には式(2)と比べより簡単で、精度も十分な式(1)を用いることとする。

### 3. ロバスト設計

機械構造物の動的設計において固有振動数の値を設計の段階で指定することは重要である。しかしながら、FRPシートを用いて補強する際、現場で作業を行うことを考慮すると、設計変数には製作誤差が生じ、固有振動数も変動し得る。特に、製作誤差として問題となるのが補強材の縦弾性係数であり、以下に考察を行う。補強材の縦弾性係数  $E_f$ 、密度  $\rho_f$  は、炭素繊維の縦弾性係数  $E_c$  (230GPa)、密度  $\rho_c$  ( $1.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ )、エポキシ樹脂の縦弾性係数  $E_m$  (3.3GPa)、密度  $\rho_m$  ( $1.3 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ) と炭素繊維シートの体積含有率  $V_c$  から、次式

$$E_f = V_c E_c + (1 - V_c) E_m \quad (9)$$

$$\rho_f = V_c \rho_c + (1 - V_c) \rho_m \quad (10)$$

により決まる。体積含有率には製作誤差が考えられ、 $E_c$  と  $E_m$  との比が大きいため、 $E_f$  は  $V_c$  の変動の影響を受け、固有振動数に大きな変動を与えることになる。また、炭素の繊維方向の乱れなども  $E_f$  の誤差の要因となる。更に、エポキシ樹脂の縦弾性係数は、硬化するときの温度や湿度などにより変化し、 $E_f$  に影響を与える。一方、式(10)では  $\rho_c$  と  $\rho_m$  との比が小さいため、 $V_c$  に製作誤差が生じてても、 $\rho_f$  の変動は小さく、固有振動数に与える影響は小さいと考えられる。従って、望んだ振動特性を実現するためには、補

強材の縦弾性係数の変化に対して固有振動数の変化が鈍感となるように補強を行うことが望ましい．そこで，補強材の縦弾性係数の変動に対する固有振動数の変化を，設計者が指定した許容値以内に収め，固有振動数を最大化するロバスト設計手法を以下に示す．

$L = 500\text{mm}$  ,  $b = 30\text{mm}$  ,  $t_s = 0.6\text{mm}$  のスチールのみからなる片持はりを初期構造物とする．この初期構造物に，図 1 に示すようにシートを用いて補強し，一次から四次モードまでの固有振動数を最大化することを目的とする．そこで評価関数を

$$J = \sum_{i=1}^4 Q_i \frac{\omega_{i,\text{init}}^2}{\omega_i^2} \quad (11)$$

とする．ここで添え字の  $\text{init}$  は初期構造物であり， $Q_i$  は各固有振動数に対する重みであり，設計者が決定する．設計変数は  $L_1$  ,  $L_2$  ,  $t_f$  とする．設計変数にはシートの繊維配向角なども考えられるが，曲げ振動のみを扱っているため，本研究では考慮せず，繊維方向とはりの長手方向を一致させる．制約条件は次式で与える．

$$Mass = \alpha Mass_{\text{init}} \quad (12)$$

$$t_f \leq \beta \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\omega_i} \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial E_f} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial E_f^2} \Delta E_f \right) \times 100 \leq \frac{\gamma}{\Delta E_f} \quad (14)$$

ここで，固有振動数の感度は

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial E_f} = \frac{1}{2\omega_i} \frac{\{X_i\}^T \frac{\partial [K]}{\partial E_f} \{X_i\}}{\{X_i\}^T [M] \{X_i\}} \quad (15)$$

より求める．式 (12) , (13) は質量，厚さに関する制約である．式 (14) の左辺は，補強材の縦弾性係数の変動  $\pm \Delta E_f$  に対する一次から四次モードまでの固有振動数の変動の総和を百分率で示している．この制約条件を用いることにより，製作において考えられる変動幅  $\pm \Delta E_f$  に対し，設計者が一次から四次モードまでの固有振動数の変動の許容値を  $\gamma\%$  と指定できる．この制約条件の下，振動数を最大化する設計変数が最適化理論を用いて決定される． $E_s$  ,  $\rho_s$  に関しては表 1 に示した値を用い， $E_f$  ,  $\rho_f$  は  $V_c = 0.5$  として計算を行う．また，最適化の計算には可変計量法<sup>(8)</sup>を用いる．

**3.1 計算結果** 初期構造物の固有振動数は  $p_1 = 1.98\text{Hz}$  ,  $p_2 = 12.4\text{Hz}$  ,  $p_3 = 34.8\text{Hz}$  ,  $p_4 = 68.3\text{Hz}$  である．固有振動数の重み  $Q$  は，低次の固有振動数を上げることがを目的とし， $Q_1 = 0.5$  ,  $Q_2 = 0.3$  ,  $Q_3 = 0.1$  ,  $Q_4 = 0.1$  とする．質量と厚さに関する設計パラメータ  $\alpha$  ,  $\beta$  をそれぞれ 1.2 , 2mm とし，変動幅  $\Delta E_f$  を 20 , 50GPa として最適化した構造物を beam1 , 2 とする．またシートの厚さに関する条件  $\beta$  のみを 1.4mm と変えて最適化した構造物を beam3( $\Delta E_f = 20\text{GPa}$ ) , beam4( $\Delta E_f = 50\text{GPa}$ ) とする．固有振動数の誤差  $\gamma$  は全ての構造物において 1% 以下と指定する．以上の四つのパターンについて上述したロバスト設計を行う．表 6 には，それぞれの設計パラメータに基づき最適化された構造物の設計変数，評価関数値，固有振動数を示す．また，表 7 には beam1 , 3 , 表 8 には beam2 , 4 において  $\pm \Delta E_f$  変動したときの固有振動数と固有振動数の変動の総和を示す．表 6 より，どの条件においても，FRP 補強することにより初期構造物と比べ，固有振動数を高く

することができている．beam2 は beam1 と比べると，設計条件が厳しいため，評価関数値が高くなっているが，どちらの構造物も固有振動数の変動を，ほぼ 1% とすることができ，設計条件を満足している．また，シートの厚さの条件を厳しくした beam3 , 4 についても同様のことが言え，式 (14) を制約条件に入れ最適化計算を行うことにより，ロバスト性の高い設計が可能となっている．

また，比較のため，評価関数に質量を用い，

$$J = Mass \quad (16)$$

制約条件を

$$\omega_1 \geq \xi \omega_{1,\text{init}} \quad (17)$$

$$\omega_2 \geq \zeta \omega_{2,\text{init}} \quad (18)$$

とした最適化問題を考える．これは一次と二次の固有振動数を  $\xi$  ,  $\zeta$  倍し，質量を最小にする設計変数を求める問題である．一次と二次の固有振動数が beam2 の一次と二次の固有振動数より高くなるように  $\xi = 1.39$  ,  $\zeta = 1.39$  として質量最小化を行った構造物を beam5 とする．また，beam4

Table 6 Results of robust design

	beam1	beam2	beam3	beam4
$L_1(\text{mm})$	0.0	0.0	3.1	12.4
$L_2(\text{mm})$	96.5	75.8	110.0	108.7
$t_f(\text{mm})$	1.6	2.0	1.4	1.4
$Mass(\text{g})$	84.9	84.9	84.9	84.9
$J$	0.43	0.52	0.46	0.58
$p_1(\text{Hz})$	3.03	2.75	3.19	3.04
$p_2(\text{Hz})$	18.9	17.2	18.7	15.6
$p_3(\text{Hz})$	52.7	48.2	46.1	36.5
$p_4(\text{Hz})$	103	94.4	78.0	72.8

Table 7 Natural frequencies with variation  $\Delta E_f$

	beam1		beam3	
	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$
$\Delta E_f = 20\text{GPa}$				
$p_1(\text{Hz})$	3.03	3.03	3.19	3.19
$p_2(\text{Hz})$	19.0	18.9	18.8	18.7
$p_3(\text{Hz})$	52.8	52.6	46.3	45.9
$p_4(\text{Hz})$	103	102	78.1	77.9
total error(%)	0.73	-1.0	0.75	-1.0

Table 8 Natural frequencies with variation  $\Delta E_f$

	beam2		beam4	
	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$
$\Delta E_f = 50\text{GPa}$				
$p_1(\text{Hz})$	2.75	2.75	3.05	3.03
$p_2(\text{Hz})$	17.2	17.2	15.6	15.5
$p_3(\text{Hz})$	48.2	48.0	36.6	36.5
$p_4(\text{Hz})$	94.5	93.9	72.8	72.7
total error(%)	0.45	-1.1	0.51	-1.1

Table 9 Results of minimum mass design

	beam5	beam6
$L_1(\text{mm})$	0.0	0.0
$L_2(\text{mm})$	102.9	148.1
$t_f(\text{mm})$	0.43	0.26
$Mass(\text{g})$	74.9	74.3
$p_1(\text{Hz})$	2.91	3.04
$p_2(\text{Hz})$	17.2	15.7
$p_3(\text{Hz})$	44.7	40.5
$p_4(\text{Hz})$	81.9	80.9

Table 10 Natural frequencies with variation  $\Delta E_f$ 

$\Delta E_f = 50\text{GPa}$	beam5		beam6	
	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$	$+\Delta E_f$	$-\Delta E_f$
$p_1(\text{Hz})$	2.97	2.79	3.21	2.76
$p_2(\text{Hz})$	17.7	16.2	16.6	14.5
$p_3(\text{Hz})$	46.7	41.8	41.7	38.8
$p_4(\text{Hz})$	85.2	77.9	82.8	77.6
total error(%)	14	-22	17	-25

Table 11 Experimental results of robust design

	beam2		beam4	
	$p_1(\text{Hz})$	$p_2(\text{Hz})$	$p_3(\text{Hz})$	$p_4(\text{Hz})$
$p_1(\text{Hz})$	2.75	2.73	3.02	3.01
$p_2(\text{Hz})$	17.2	17.2	15.2	15.3
$p_3(\text{Hz})$	48.1	48.1	35.7	36.2
$p_4(\text{Hz})$	94.0	94.3	72.8	72.7
total error(%)	-0.63	-1.0	-5.4	-3.9

Table 12 Experimental results

	beam5		beam6	
	$p_1(\text{Hz})$	$p_2(\text{Hz})$	$p_3(\text{Hz})$	$p_4(\text{Hz})$
$p_1(\text{Hz})$	2.81	2.92	2.70	2.85
$p_2(\text{Hz})$	16.2	17.6	14.3	15.5
$p_3(\text{Hz})$	42.0	46.5	38.3	40.0
$p_4(\text{Hz})$	77.0	84.4	76.6	78.9
total error(%)	-21	10	-31	-11

の一次と二次の固有振動数より高くなるように  $\xi = 1.53$ ,  $\zeta = 1.26$  として質量最小化を行った構造物を beam6 とする．表 9 に計算結果を示す．表 10 には  $E_f$  が  $\pm 50\text{GPa}$  変動したときの固有振動数と固有振動数の変動の総和を示す．どちらも, beam2, 4 と比べると, シートの厚さが薄く, 貼付する領域が長い構造となっている．一次と二次の固有振動数は制約条件を満足し質量も小さくなっているが, ロバスト性を考慮していないため,  $E_f$  の変動により, 固有振動数が大きく変動している．

**3.2 実験結果** beam2, 4, 5, 6 をそれぞれ二つ製作し, 図 2 に示した実験装置を用いてロバスト設計の検証を行う．同じはりを二つ製作したのは再現性を検討するためである．表 11 にはロバスト設計を行った beam2, 4 の固有

振動数と計算値との誤差の総和を示す．beam2 に関しては誤差の総和がほぼ 1% となり計算結果と実験結果が一致している．また, 二つ製作したはりの固有振動数はどちらもほぼ一致しており製作誤差の影響を受けず, 再現性があることがわかる．beam4 は誤差の総和がやや大きい, 各固有振動数の計算値との誤差は 3% 未満に収めることができ, 製作誤差の影響をあまり受けずに補強を行っている．また, beam2 と同様に再現性もあり, ロバスト設計の有効性を確認できる．

表 12 には質量最小化を行った beam5, 6 の固有振動数と計算値との誤差の総和を示す．beam5, 6 は補強材の縦弾性係数の製作誤差の影響を受け, 固有振動数の誤差が大きい．また, 再現性も低く, 各固有振動数においてばらつきが大きい．これは式 (14) を制約条件に入れずに最適化を行ったためである．

#### 4. 結 言

断面が変化する位置での変位とたわみ角の連続性を満足した変位関数を用いて, FRP 補強された片持はりの自由振動をリッツ法により解析した．そして提案したモデルに基づき, 製作誤差が大きいと考えられる補強材の縦弾性係数の変動に対する固有振動数の変動の総和を指定できる制約条件を用い, ロバスト設計を行い, 実験と比較した結果, 以下の結論を得た．

- (1) 提案したモデリングは FRP 補強された片持はりの振動特性をよく表しており, 実験値と非常によく一致した．
- (2) ロバスト設計した構造物は, 製作誤差の影響を受けず, 固有振動数の変動の総和を許容値に収め, 固有振動数の最大化を行った．
- (3) ロバスト設計手法により, FRP 補強された構造物は, 製作誤差の影響を受けないため, 再現性があることを実験により確認した．

#### References

- (1) 北野敦則・ほか 5 名, 炭素繊維シートを用いた腰壁付 RC 柱の耐震補強に関する実験的研究, 日本コンクリート工学論文集, **21-3**(1999), 1375-1380．
- (2) Jang, S.K., and Bert, C.W., Free Vibration of Stepped Beams: Exact and Numerical Solutions, *J. Sound Vib.*, **130-2**(1989), 342-346.
- (3) Sanzi, H.C., and Bergmann, A., Numerical Experiments on Vibrating Rectangular Plates with Discontinuously Varying Cross Section, *J. Sound Vib.*, **135-1**(1989), 161-165.
- (4) Guo, S. J., Keane, A.J., and Torbati, M.M., Vibration Analysis of Stepped Thickness Plates, *J. Sound Vib.*, **204-4**(1997), 645-657.
- (5) Lam, K.Y., and Amrutharaj, G., Natural Frequencies of Rectangular Stepped Plates Using Polynomial Beam Functions with Subsectioning, *Applied Acoustics*, **44**(1995), 325-340.
- (6) Lee, K.H., and Eom, I.S., Robust Design for Unconstrained Optimization Problems Using the Taguchi Method, *AIAA J.*, **34-5**(1996), 1059-1063.
- (7) Lee, K.H., and Park, G.J., Robust Optimization Considering Tolerances of Design Variables, *Computers and Structures*, **79**(2001), 77-86.
- (8) 山川宏, 最適化デザイン, (1996), 192, 培風館.