計算力学技術者１級（熱流体）標準問題集第３版
問 1-12 解説訂正（pp．93-94）

1. 図の着色を濃く変更.
2. 図中の初期条件，境界条件の式に表れる h を H に訂正.
3. C^- 特性線において成り立つ式 (p．94，12 行目) の符号を訂正

(誤)

$$p_C + \rho c u_c = p_B + \rho c u_B$$

(正)

$$p_C - \rho c u_C = p_B - \rho c u_B$$

4. その他，不完全な文章を修正（赤字部分）.

問 1–12

解説：　流体の圧縮性を考慮した 1 次元管内流れの解析に対しては，特性曲線法 (Method of Characteristics, MOC) が有効である．管長手方向にとった座標 x に対し，管断面積が一定の場合，質量保存則と運動方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

ここで u は管内平均流速，p は管内の静圧であり，流体の音速 c は

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)$$

と定義される．

以上を変形すると，特性曲線（C$^+$ 線と呼称する）

$$\frac{dx}{dt} = u + c$$

上ではリーマン不変量 $p + \rho c u$ が一定になる．また，特性曲線（C^- 線と称する）

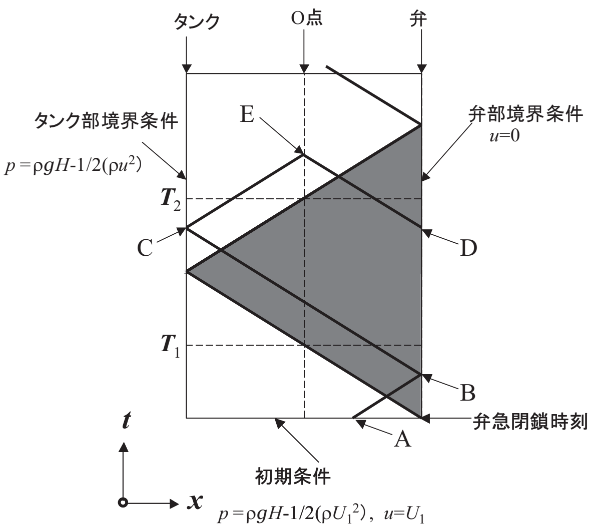
$$\frac{dx}{dt} = u - c$$

上ではリーマン不変量 $p - \rho c u$ が一定になる．

一般に，液体の場合は $u \ll c$ が成立するので，C^+ 線，C^- 線をそれぞれ

$$C^+ : \frac{dx}{dt} = c, \qquad C^- : \frac{dx}{dt} = -c$$

と，さらに単純化できる．この C^+ 線，C^- 線の交点において，局所的な流体量である p,u を求める手法が特性曲線法である．液体流れでありながら，圧縮性を無視できない水撃現象 (Water hammer) の解析には特に有効である．管の断面積が変化する場合や，管摩擦を考慮する場合にも拡張することも可能である．単純な問題では，特性曲線法を用いた図式解法により手計算で圧力波の伝播が解析できるが，現象が複雑な場合は，特性線の交点に計算格子が一致するような空間と時間の離散化を行い，数値解析する．



本問題に関しては，下図のような図式解法で計算することができる．図中の $A-B$ 間の C^+ 特性線上ではリーマン不変量 $p + \rho c u$ が一定になるので，A 点，B 点における圧力を p_A，p_B，速度を u_A，u_B とすると，

$$p_A + \rho c u_A = p_B + \rho c u_B$$

が成り立つ．ここに図中に示す初期条件と境界条件を代入すると

$$\rho g H - \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho c U_1 = p_B$$

となり，水撃によって上昇する圧力 P_1 は，

$$P_1 = p_B - \left(\rho g H - \frac{1}{2}\rho U_1^2\right) = \rho c U_1$$

となる．この式は水撃公式として広く知られている．この特性曲線の関係は，図中の色をつけた領域全てで成立し，この領域は全て圧力一定，流速一定（す

なわち流速ゼロ）となる．これは，弁の急閉鎖で生じた擾乱が音速で管路上流に伝播していくことと解釈できる．

　また，特性線の傾きは，音速にほぼ一致するところから，

$$T_1 = \frac{L}{2c}, \qquad T_2 = 3T_1$$

となる．これより正解は②となる．

　次に図中の $C-B$ 間の C^- 特性線上ではリーマン不変量 $p-\rho cu$ が一定になるので，C 点における圧力を p_C，速度を u_C とすると，

$$p_C - \rho c u_C = p_B - \rho c u_B$$

となり，これに初期条件と境界条件を代入すると

$$\rho g H - \frac{1}{2}\rho u_C^2 - \rho c u_C = \rho g H - \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho c U_1$$

となる．すなわち

$$u_C = -U_1$$

となり，水はタンクに向かって逆流するようになる．図中の $C-E$ 間の C^+ 線，$D-E$ 間の C^- 線で同様の関係式が成立するが，B 点と D 点の値は等しいため，C 点と E 点の値も等しくなる．このことから，O 点の流速は二番目の変化が正解となる．

正解：②，(b)

（キーワード：水撃解析，特性曲線法，1 次元解析）