

位相・形状最適化の実務への適用と問題点

2004. 9.27

株式会社くいと 石井 恵三

会社紹介

1. 株式会社くいと
2. 業務内容
計算力学関連ソフトウェアの開発, 販売
3. ビジネスモデル
大学のユニークな研究を商用化する
4. 設立 1985年3月
5. 社員 14名
6. 資本金 15,200,000円

主なプロダクト

- | | |
|--------------------|------------------|
| 1. Adaptive FEM | OPTIMESH |
| 2. 複合材料解析 | COMPMAT |
| 3. 位相 / 形状最適化 | OPTISHAPE |
| 4. Image Based CAE | VOXELCON |
| 5. パラメータ最適化 | AMDESS |

3

目次

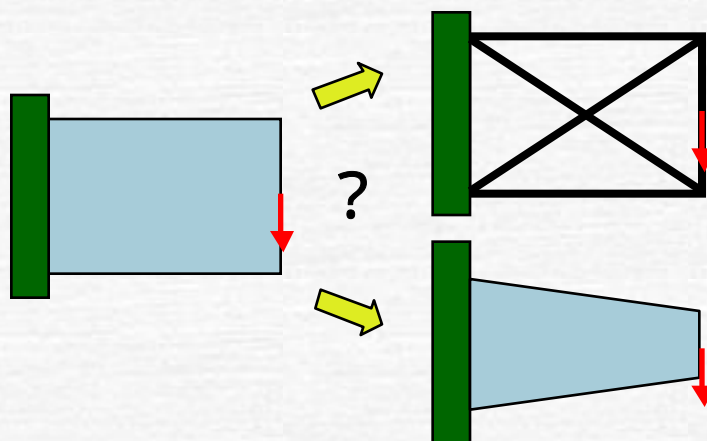
1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. ‘力法’による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

4

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. '力法'による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

5

もっと強くしたい! もっと軽くしたい!
でもどうすればよいだろう?



6

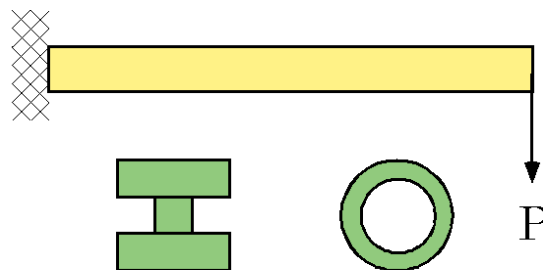
構造最適化の問題は以下の3つに分類される。

1. 寸法問題 (Sizing Problem)
2. 形状問題 (Shape Problem)
3. 位相問題 (Topology/Layout Problem)

7

寸法問題 (Sizing Problem)

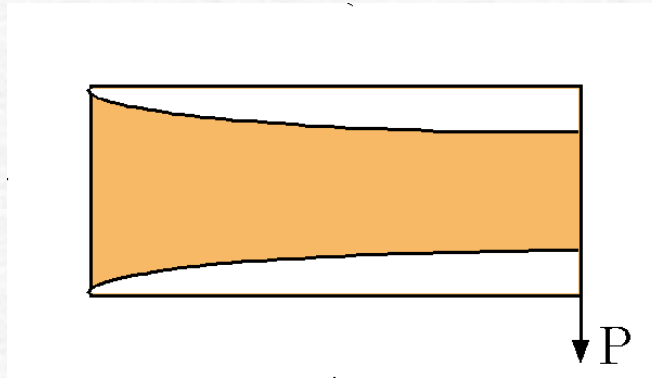
梁の断面形状、薄板の板厚等を設計変数とする最適化問題。



8

形状問題 (Shape Problem)

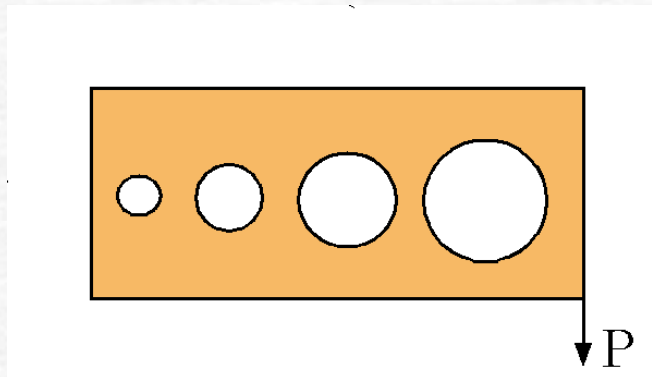
構造物の表面形状を設計変数とする最適化問題 .



9

位相問題 (Topology / Layout Problem)

空間上の位相を設計変数とする最適化問題 .



10

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. ‘力法’による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

11

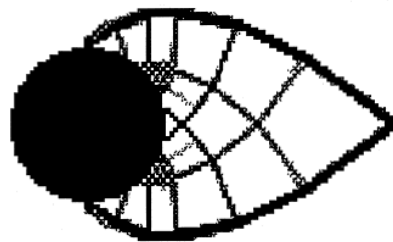
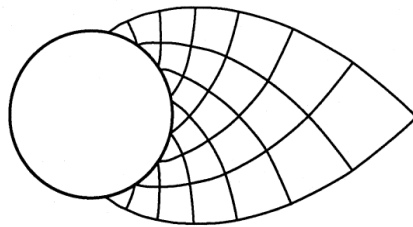
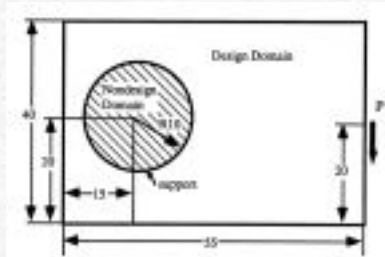
連続体の位相最適化の原点

Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N.
Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
71(1988) 197-224.

Suzuki, K. and Kikuchi, N.
Shape and topology optimization using the homogenization method.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
93(1991) 291-318.

12

Suzuki & Kikuchi による Michell Truss の例



左:ミッチェルの解(1904), 右:OPTISHAPEの結果(1991)

13

均質化法をベースにした位相最適化

- 1988 Bendsoe & Kikuchi 緩和領域の材料最適配置
- 1989 商用プログラム OPTISHAPE リリース(くいと)
- 1991 Suzuki & Kikuchi 平面応力問題の剛性最大化
- 1992 Diaz & Kikuchi 最小固有値の最大化
- 1993 Ma, et.al. 周波数応答問題への適用
- 1995 Ma, et.al. 複数の固有値の最大化
- 1998 Nishiwaki, et.al. コンプライアントメカニズムの創成
- 2003 Matsui & Terada CAMD

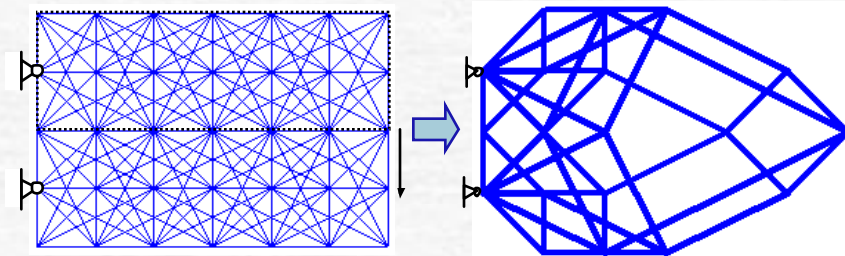
14

均質化法以外の方法による位相最適化

1989	Bendsoe	材料密度による板厚の最適化
1991	Rozvany & Zhou	体積密度を設計変数とする最適化
1993	Xie & Steven	進化的繰り返し法
1994	Yang, et.al.	密度法 + 数理計画法
1994	伊能	セルオートマトンによる最適形態
1997	Xie & Steven	ESO
2001	Fujii, et.al.	グラウンドストラクチャによる形態生成

15

グラウンドストラクチャを用いた位相生成 (藤井らによる)



16

連続体の位相最適化の代表的な手法

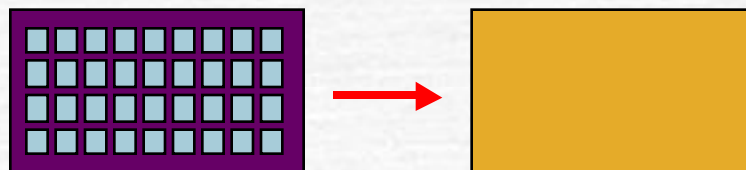
1. 均質化法を用いた方法
(Bendsoe, Kikuchi, Suzuki, Diaz, Ma)
2. ESO (Xie, Steven, Ohmori)
3. ヤング率と密度の関係を非線形関数で
近似する方法 (Rozvany, Zhou, Yang)
4. 材料の連続分布を仮定した方法
(Matsui, Terada)

17

均質化法

The Homogenization Method

対象となる構造のある領域が周期性を持つマイクロ構造で構成される場合、周期の最小単位 (Unit Cell) の構造形状とマクロ構造の大きさの関係から、ユニットセル近傍のマクロ的な平均化された材料定数を算出する方法。



周期構造

等価な均質構造

18

密度法 *The Density Approach*

対象となる構造のある領域の材料定数を次のように要素の密度のべき乗に比例することを仮定し、材料定数を算出する方法。

$$E^H = \rho^n E_0$$

E^H, E_0 : ヤング率

ρ : 仮定した要素の密度

n : べき乗項

19

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. '力法' による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

20

Bendsoe & Kikuchi が提案した位相最適化法

最大剛性を有する構造物の位相最適化問題を、構造物の平均コンプライアンス最小化問題とした。

設計領域を、特性関数を用いて記述し、対象構造物を含む充分大きな固定領域に拡張した。

固定領域は小さい穴が無数に空いた多孔質領域と仮定した。

多孔質体の材料定数を計算するために均質化法を適用した。

均質化法で用いる微視構造(ユニットセル)の穴の大きさを制御して最適な材料分布を求め、結果として最大剛性を持つ位相形態を得た。

最適化手法として、問題に適した最適化規準法を用いた。

21

何故目的関数を平均コンプライアンスの最小化にしたのか？

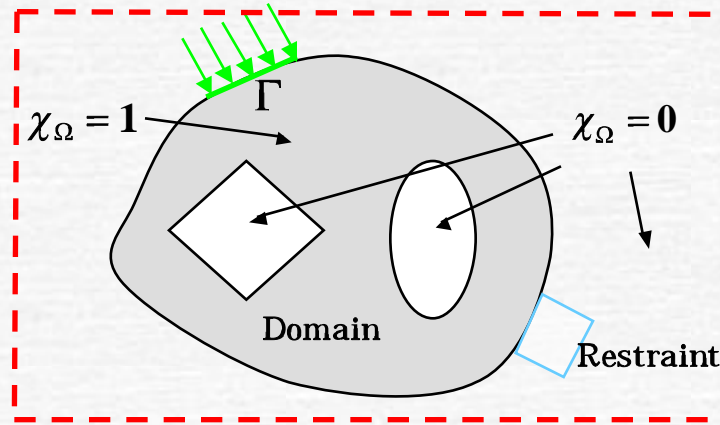
一般の構造最適化問題では、応力制約の下で質量を最小化する。しかし、弾性連続体において歪エネルギーは有界でも、応力が有界である保証はない。

実際弾性問題では、形状によって応力に特異点が存在し、理論上は無限大の応力が存在することがある。

このような場合、応力を制御することは難しいが、積分量として記述できる平均コンプライアンスであれば問題は生じない。

22

特性関数を用いて表現される緩和された領域



$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \quad \int_{\Omega} \Phi dx = \int_F \chi_{\Omega}(x) \Phi dx$$

23

固定領域内で成り立つ仮想仕事の原理

$$\int_F \varepsilon(\delta \mathbf{u})^T \chi_{\Omega} \mathbf{D} \varepsilon(\mathbf{u}) dF = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

但し、簡単化するために物体力などは省略した。

- \mathbf{u} : 仮想変位ベクトル
- : 仮想変位 \mathbf{u} により生じる歪
- \mathbf{D} : 応力 - 歪関係マトリックス
- \mathbf{t} : 境界 Γ に働く分布力

24

最適化問題

連続体の全ポテンシャルエネルギーを仮想変位で最小化し、それを設計変数で最大化する。

$$\text{Max.}_d \left[\text{Min.}_u \left\{ \frac{1}{2} \int_F \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \chi_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{d}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dF - \int_\Gamma \mathbf{u}^T t d\Gamma \right\} \right]$$

特性関数は微分可能ではない。

均質化法を適用し、上式を以下のように書き換える。

$$\text{Max.}_d \left[\text{Min.}_u \left\{ \frac{1}{2} \int_F \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{D}^H(\mathbf{d}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dF - \int_\Gamma \mathbf{u}^T t d\Gamma \right\} \right]$$

$$\chi_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{d}) \approx \mathbf{D}^H(\mathbf{d}) \quad : \quad \text{微分可能}$$

25

最も基本的な構造最適化問題 (体積制約, 平均コンプライアンス最小化)

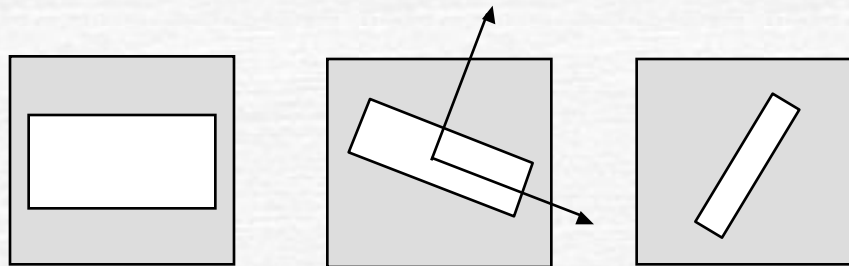
$$\text{Min.}_d \left(\mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{d}) \mathbf{u} \right) \quad \text{s.t.} \quad \int_F \rho(\mathbf{d}) dF \leq M_C$$

目的関数の設計変数に関する感度 (Sensitivity)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{d}) \mathbf{u})}{\partial d_i} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial d_i} \right)^T \mathbf{K}(\mathbf{d}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{d})}{\partial d_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{d}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial d_i} \\ &= -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{d})}{\partial d_i} \mathbf{u} \end{aligned}$$

26

鈴木・菊池が提案したユニット・セル

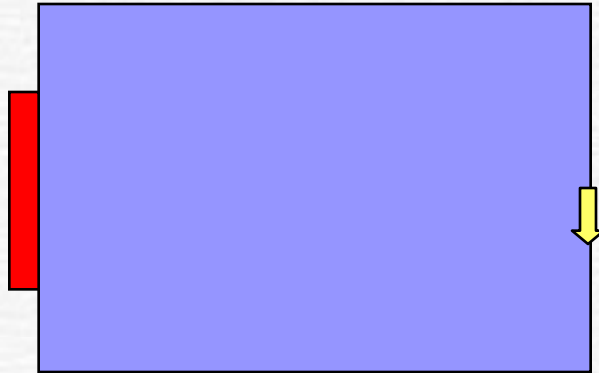


27

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. ‘力法’による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

28

計算例

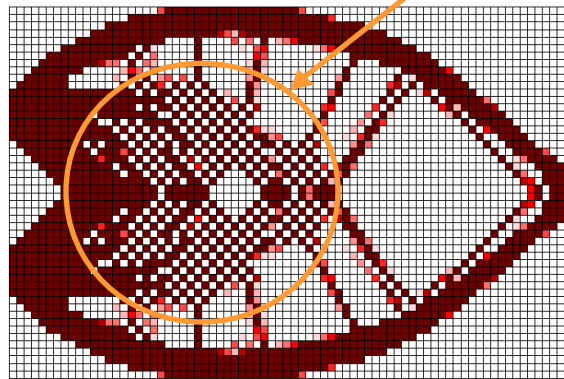


目的関数：平均コンプライアンス最小化

制約関数：設計領域の40%の体積

29

Checkerboard !!!



手法：均質化法

設計変数：ユニットセルの穴の大きさ
(要素内 Constant)

30

松井, 寺田(2003)は, **チェッカボード**などの数値不安定現象は, 要素毎に定義する設計変数が, 要素内で一定値をとるために, 連続性が阻害されたことにより起こると考え, 設計変数を節点で定義し, 要素内は定義した補間関数を用いて近似し, 設計変数に連続性を与えた.

結果としてチェッカボード現象は起こらなくなったが, 要素分割が形態を表現するのに十分な細かさがない場合に, 別の不安定現象と考えられる, **アイランド現象**が起こるようになった.

31

松井・寺田の CAMD の概要

(Continuous Approximation of Material Distribution)

簡単化するために設計変数を節点の材料密度とする.

$$\rho_e = \sum_i N_i \rho_i$$

今, ヤング率が定義した材料密度と次の関係で表されると仮定すると

注) 松井・寺田は均質化法で定式化

$$E = \rho^m E_0$$

32

目的関数を平均コンプライアンス, 制約条件を体積とすれば, 最適化式は次のように簡単に記述できる.

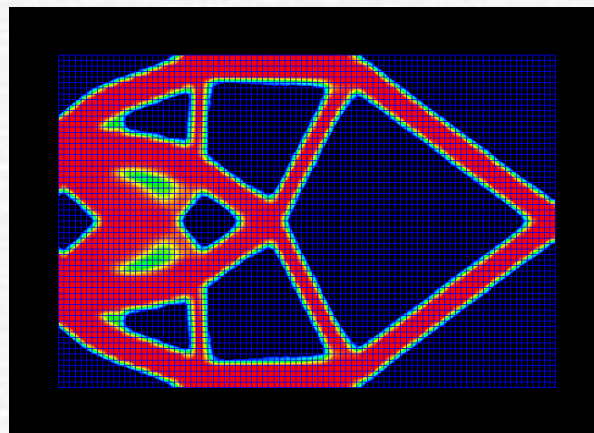
$$\text{Min.} C_{mean}, \quad \text{s.t.} \quad V \leq V_0$$

目的関数, 制約関数の設計変数に関する感度は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{mean}}{\partial \rho_i} &= \int_{\Omega} -\varepsilon \frac{\partial D^H}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} \varepsilon d\Omega \\ &= \int_{\Omega} -\varepsilon (m\rho^{m-1} D_o) N_i \varepsilon d\Omega \\ \frac{\partial V}{\partial \rho_i} &= \int_{\Omega} N_i d\Omega \end{aligned}$$

33

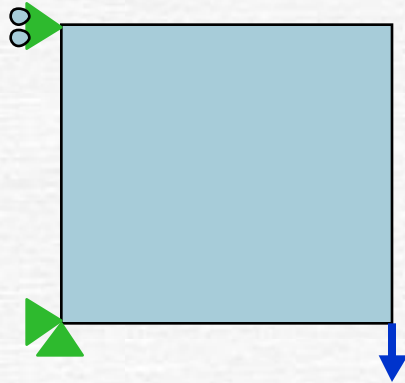
CAMDで計算した結果



手法: 密度法 ($E^H = {}^3E_0$)
設計変数: 節点の密度 (要素内連続)

34

色々試してみる

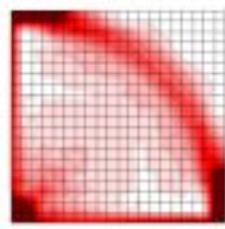
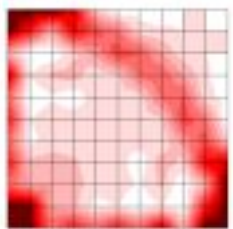


目的関数 : 平均コンプライアンス最小化

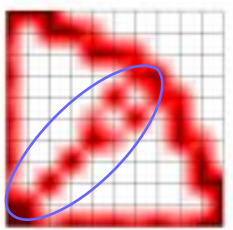
制約 : $V \leq 0.3V_0$

35

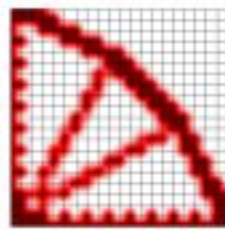
Penaltyを考慮しない($m=1$)と構造物が作れない



Penaltyを考慮($m=3$)しても別の問題が...



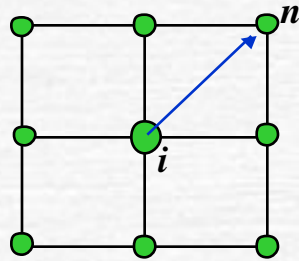
10 × 10 分割



20 × 20 分割

36

感度の平滑化



節点間の距離を重みとして、感度を平滑化する。

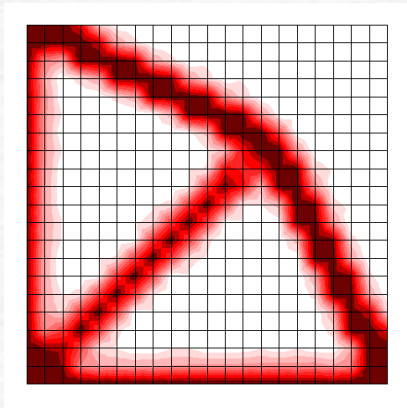
$$w_n = \frac{(l_{\max} - l_{ni})}{l_{\max}}$$

$$\left(\frac{\partial C_{mean}}{\partial \rho_i} \right)_{new} = \alpha \left(\frac{\partial C_{mean}}{\partial \rho_i} \right)_{old} + \beta \left\{ \sum_n w_n \left(\frac{\partial C_{mean}}{\partial \rho_n} \right) \rho_n / \left(\rho_i \cdot \sum_n w_n \right) \right\}$$

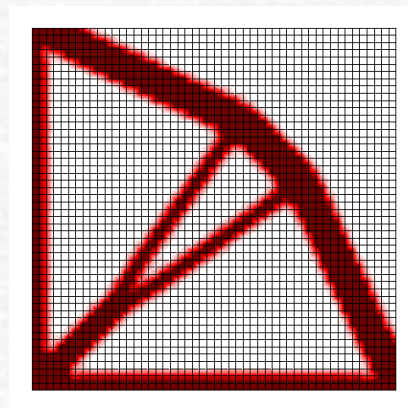
$$\alpha + \beta = 1.0$$

37

平滑化した感度を用いて算出した位相



20 × 20 分割



50 × 50 分割

38

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. ‘力法’による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

39

どんなことができるか？

1. 体積を制約した剛性の最大化
2. 体積を制約した固有振動数の最大化
3. 固有振動数を入力した値に近づける
4. 体積と固有振動数を制約した剛性の最大化
5. 体積と剛性を制約した固有振動数の最大化

40

単一制約問題の最適化

- 体積制約平均コンプライアンス最小化

$$\Phi_{mean} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^H \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega,$$

$$\text{Minimize } \Phi_{mean}, \quad s.t. \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_C$$

- 体積制約平均固有振動数最大化

$$\Lambda_{mean} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m w_i}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\lambda_i}} \right),$$

$$\text{Maximize } \Lambda_{mean}, \quad s.t. \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_C$$

41

多制約問題の最適化

- 体積と固有振動数を制約した剛性の最大化

$$\text{Minimize } \Phi_{mean}$$

$$s.t. \quad V \leq V_C \quad \& \quad \Lambda_{mean} \geq \Lambda_C$$

- 体積と剛性を制約した固有振動数の最大化

$$\text{Maximize } \Lambda_{mean}$$

$$s.t. \quad V \leq V_C \quad \& \quad \Phi_{mean} \geq \Phi_C$$

42

多目的問題の最適化

体積を制約した剛性の最大化と固有振動数の最大化

Minimize Π_{new} , *s.t.* $V \leq V_C$

$$\Pi_{new} = w \frac{\Phi}{\Phi_0} + (1-w) \frac{\Lambda_0}{\Lambda}$$

w : *weighting factor*

Φ : *Mean Compliance*

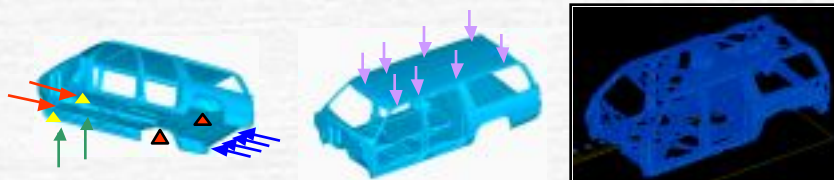
Λ : *Mean Eigen Frequency*

43

位相最適化の応用例

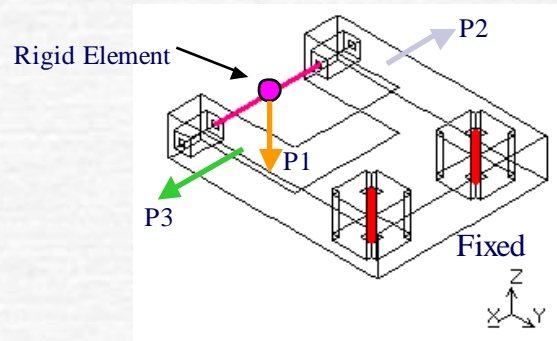
(1) エンジンマウントブラケットの設計

(2) X線循環器診断装置 Cアームの断面設計



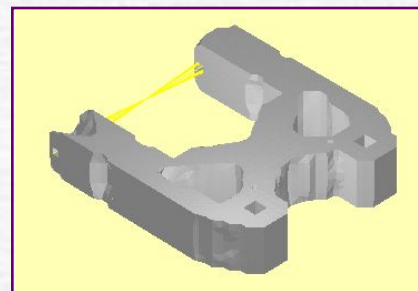
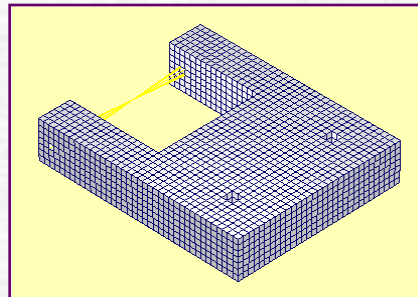
44

(1) エンジンマウントブラケットの設計 (多制約最適化)



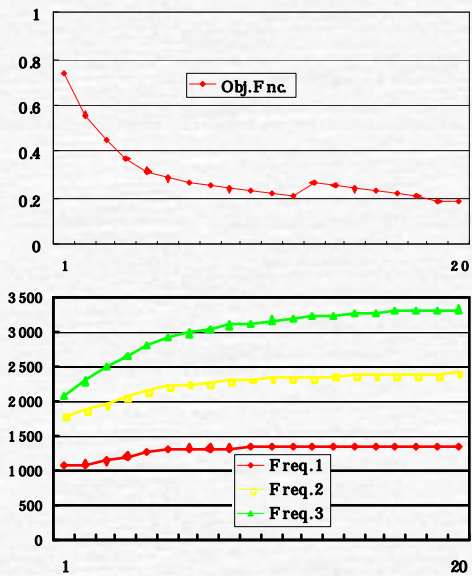
- 1) 目的関数 : 剛性最大化
- 2) 制約条件 : $V \leq 0.5V_0$ & $\Lambda_{(1+2+3)/3} \geq 2000Hz$
- 3) 荷重 : エンジン重量 (P1), 前後衝突荷重 (P2, P3)

45



46

目的関数(上)と固有振動数(下)の履歴



47

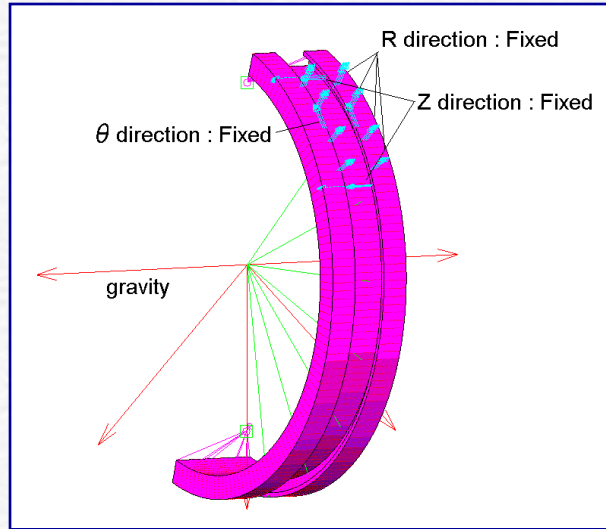
(2) X線循環器診断装置Cアームの断面設計



提供:株式会社東芝様

48

境界条件



49

設計条件

目的関数: 平均コンプライアンスの最小化

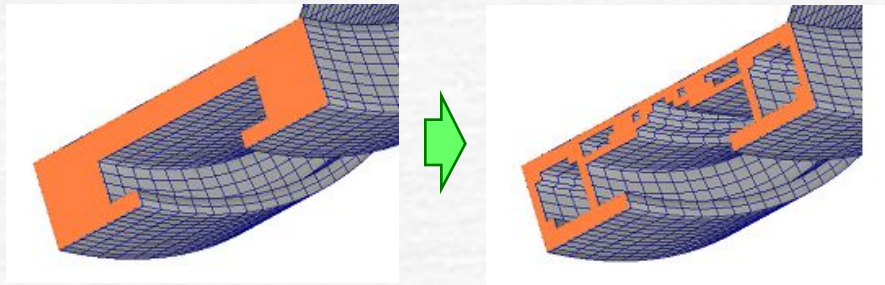
制約 : 断面の50%の材料を削る

C型アームの断面は一様形状

境界条件: 拘束 = 5, 荷重 = 7

50

拘束: 5, 荷重: 7, 合計35ケースに対応する位相
(一様断面設計)



設計前

設計後

51

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード現象とその対策
5. 位相最適化の実務への適用
6. '力法' による形状最適化
7. 形状最適化の実務への適用
8. まとめ

52

形状最適化の代表的な手法

1. Basis Vector を用いる方法
(MSC.Nastran, GENESIS 等で採用)
2. 境界をSpline 関数、Lagrange 関数
等で近似する方法
(Pro/MECHANICA 等で採用)
3. 力法

53

力法(*Traction Method*)

領域変動に対する目的汎関数の導関数は、形状勾配関数を係数関数とする領域変動率(速度場)の一次形式として得られる。
領域を線形弾性体と仮定すると、境界に形状勾配関数に比例した力を作用させたときの変位場を領域変動と見做し、これを繰り返す。

畔上秀幸 ‘領域最適化問題の一解法
日本機械学会論文集60巻574号(1994)

54

写像

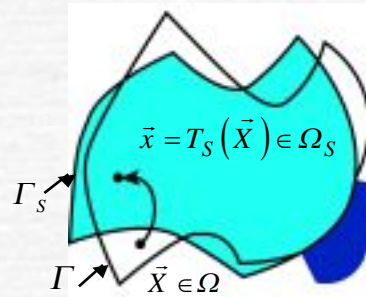
設計領域の変動 (形の変化) を表す関数
1 媒介変数写像 (s : 変動の履歴, 時間)

$$\vec{T}_s(\Omega) : \Omega \mapsto \Omega_s$$

領域変動の速度
(領域の変動率)

$$\vec{V}(\Omega) = \frac{\partial \vec{T}_s(\Omega)}{\partial s}$$

提供: 畔上秀幸教授



55

写像に対する感度

領域の写像を設計変数とした場合, 目的関数の
変動率は、次のように表現できる。

$$\dot{f} = \int_{\Gamma} G \vec{n} \cdot \vec{V} d\Gamma$$

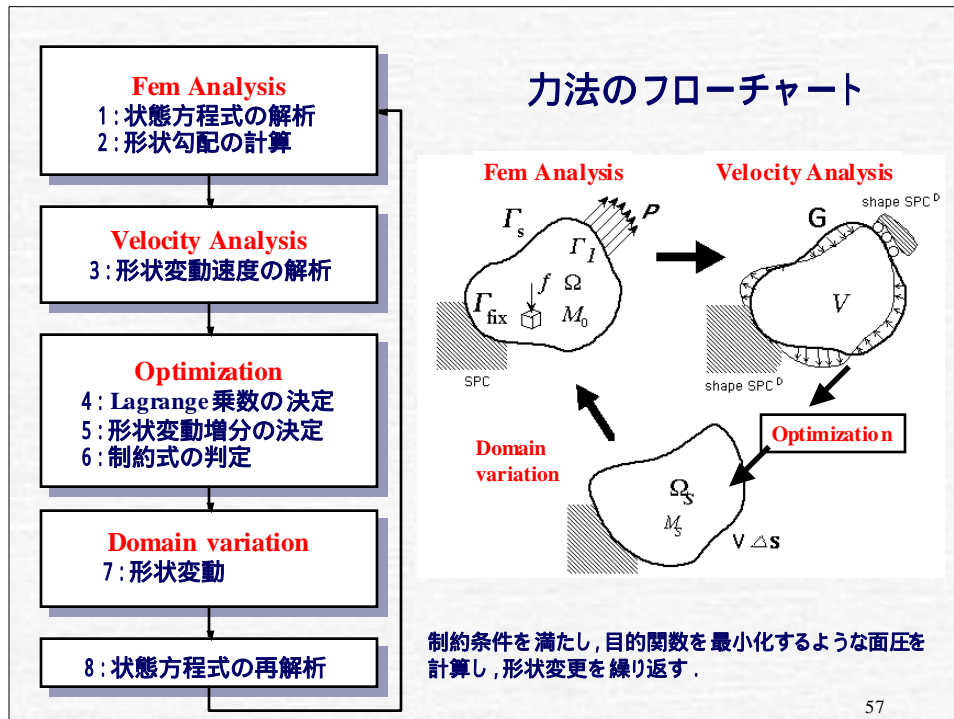
感度 (形状勾配関数)

設計変数の変動率 (領域変動の速度)

Γ : 設計領域の境界 (表面)

\vec{n} : 単位法線ベクトル

56



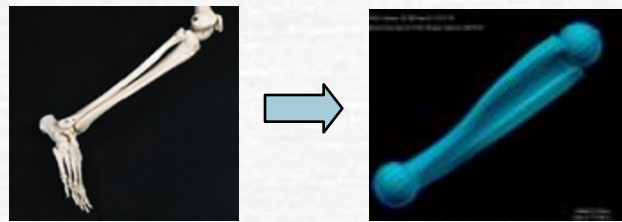
‘方法’の特長

- ・有限要素モデルがあればよい。
- ・境界に形状勾配関数に応じた圧力を載荷するので、メッシュは弾性変形し潰れにくい。
- ・体積制約，剛性最大化の問題では正則性が保障される。

58

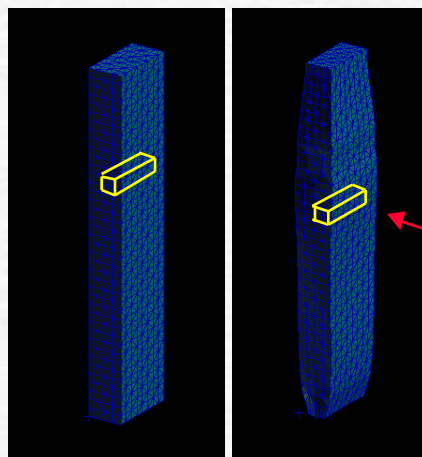
形状最適化の応用例

- (1) モード節位置の最適化
- (2) 抜きを考慮した穴あき梁の最適化
- (3) リンク部品の最適化(多制約)
- (4) 薄板モデルの最適化



59

(1) モードの節位置の最適化

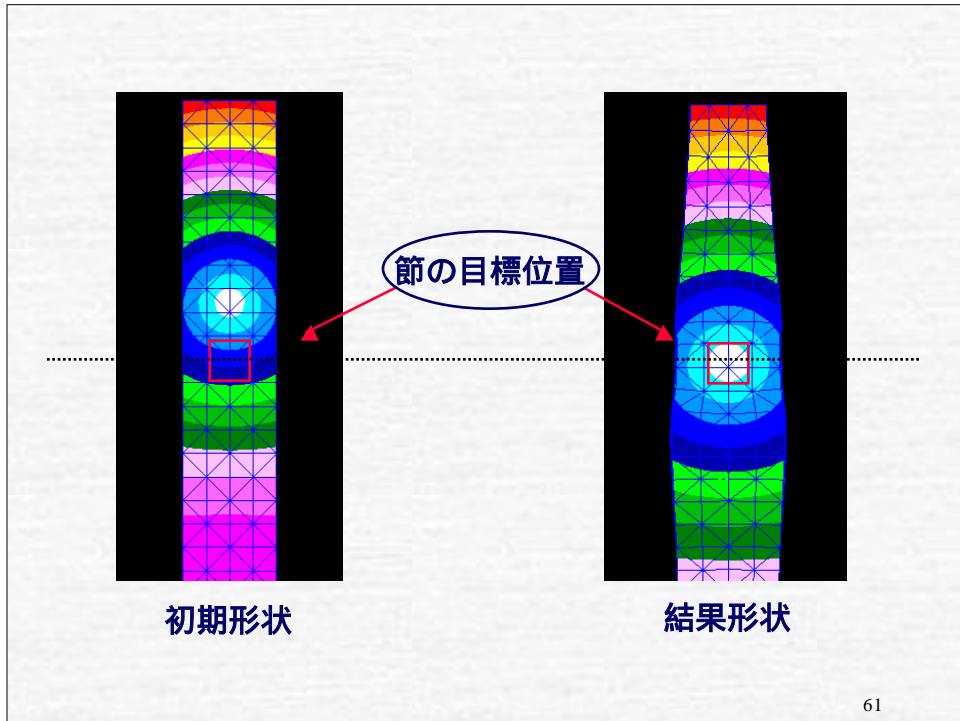


片持ち梁
下端完全拘束
3次モード
節の目標位置

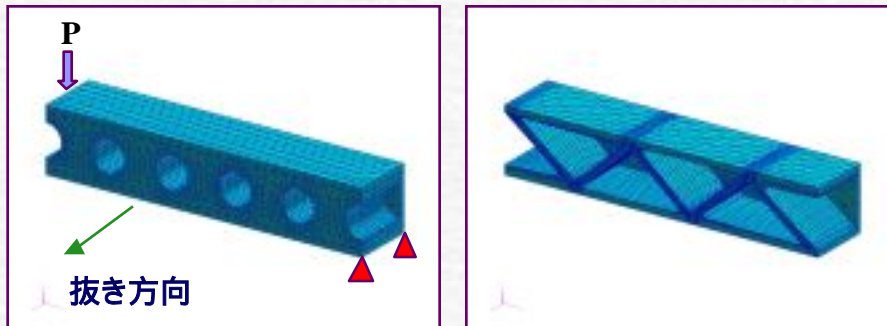
初期形状

結果形状

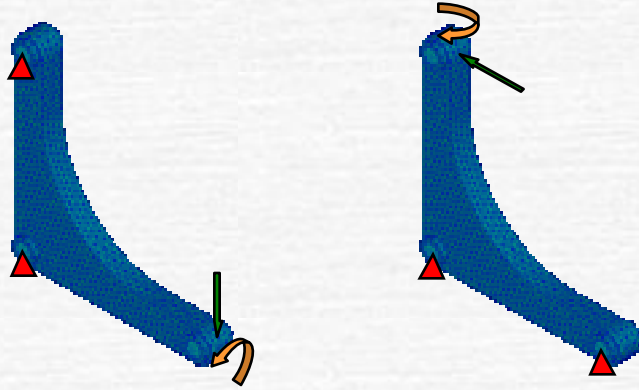
60



(2) 抜きを考慮した穴あき梁の最適化



(3) リンク部品の最適化

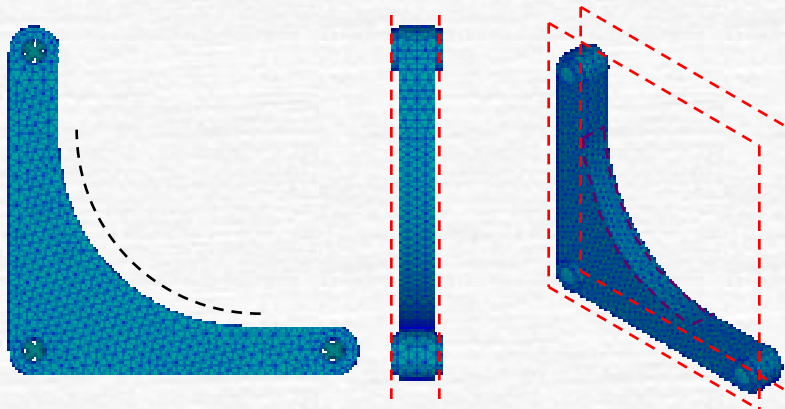


拘束ケース1:
荷重1 (曲げ), 荷重2 (ねじり)

拘束ケース2:
荷重3 (曲げ), 荷重4 (ねじり)

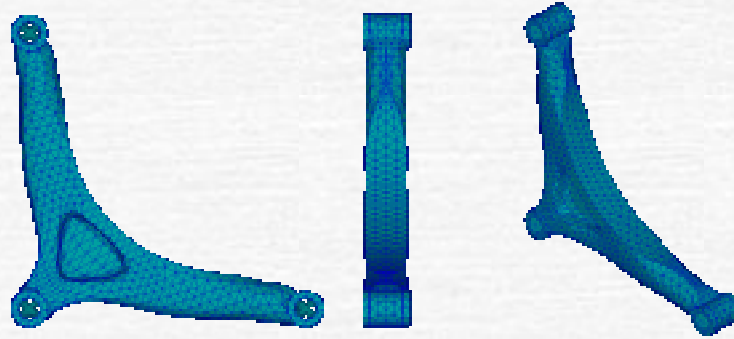
63

形状変動の制限



64

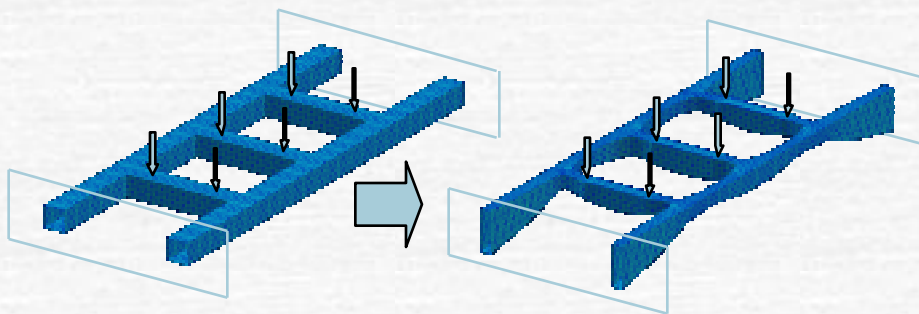
最適形状



体積	コンプライアンス (曲げ,ねじり)	干渉 製造可能性	1次固有振動数 (拘束1,2)	Mises応力 (曲げ)	Mises応力 (ねじり)
83.3%	94.8%, 100%	OK	各 100%	各 90%	各 50.9%

65

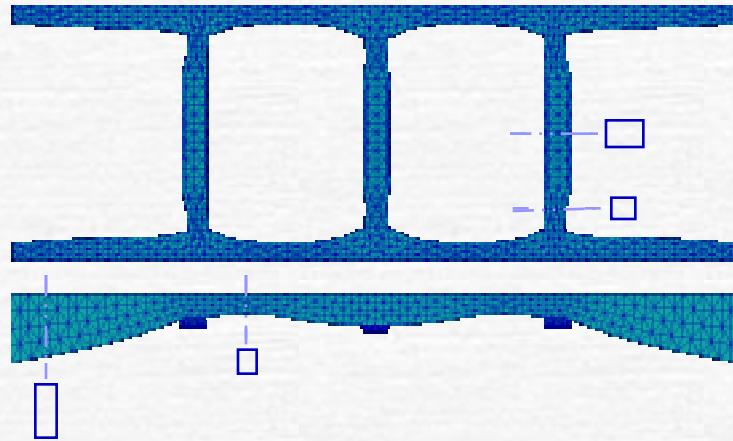
薄板構造の基本断面形状を保持した最適化



コンプライアンス80%
18.3%軽量化

66

基本断面形状維持



67

1. 構造最適化の分類
2. 連続体の位相最適化の歴史
3. Bendsoe & Kikuchi が提案した方法
4. チェッカーボード
5. 松井, 寺田の CAMD
6. 位相最適化の実務への適用
7. まとめ

68

まとめ

Bendsoe & Kikuchi が先鞭をつけた位相最適化は CAE を実践する上で、設計者にアイデアを与える重要な技術である。

そして畔上による力法は形状変動を厳密に扱う連続体の形状最適化手法であり、設計の改良にはなくてはならない技術である。

構造最適化の領域で世界をリードするこの2つの技術が、いずれも日本人により生みだされたことは興味深い。

これらの技術を組み込んだ構造最適化ソフトウェアを大事に育て、製造業の設計に少しでも役に立つことを目指したい。

69

本日はありがとうございました

70