機械屋の数学 第８回 補足資料

・接合漸近展開法における高次項の計算

ここでは，以下の例題に関して，境界層内外の高次項の計算方法を説明する．

例題２

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{3}{2}e^{-3x}\qquad(\varepsilon\ll 1)\qquad\text{(A-1)}$$

境界条件： $u(0)=0$，$u(\infty)=1$　　(A-2)

この問題は，学会誌，機械系の数学（第７回，第８回）で与えた例題（以下，例題１と呼ぶ）とよく似ているが，右辺・非同次項にあったεの入った項が削られている．この問題に対して，境界層型の特異摂動問題として扱い，接合漸近展開法を用いて高次の近似解を求める方法について説明する．

まず，近似の第一項（Leading Order Term）$O(\varepsilon^0)$の項について，外部領域の解を$u^0_{\mathrm{out}}(x)$，境界層内部の解を$u^0_{\mathrm{in}}(x^*)$とおく．このとき，式(A-1)から得られる遠方の外部領域と，境界層の内部領域の方程式は，以下の様になる．

外部領域： $$\frac{\mathrm{d}u^0_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x}=-\frac{3}{2}e^{-3x}\qquad\text{(A-3)}$$

内部領域： $$\frac{\mathrm{d}^2u^0_{in}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u^0_{in}}{\mathrm{d}x^*}=0\qquad\left(x^*\equiv\frac{x}{\varepsilon}\right)\qquad\text{(A-4)}$$

この式は，例題１の問題と同じになる．また，境界条件も例題１と同じなので，

$$\begin{cases}u^0_{\mathrm{out}}(x)=\dfrac{1}{2}e^{-3x}+1 & (\text{外部領域})\\[2mm] u^0_{\mathrm{in}}(x)=\dfrac{3}{2}\left(-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}+1\right) & (\text{内部領域})\end{cases}\qquad\text{(A-5)}$$

となる．また，外部領域と内部領域の解を滑らかに接合した合成解も，例題１と同じく

$$u^0_{\mathrm{unify}}\cong u^0_{out}+u^0_{\mathrm{in}}-U^0_{\mathrm{match}}=\frac{1}{2}e^{-3x}+1-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\qquad\text{(A-6)}$$

となる．

さて，式（A-1）で与えられる問題も，厳密解を計算することができ，得られる厳密解は，この場合は，

$$u_{\mathrm{exact}}=\frac{1}{2(1-3\varepsilon)}e^{-3x}+1-\frac{3(1-2\varepsilon)}{2(1-3\varepsilon)}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\qquad\text{(A-7)}$$

となる．例題１の場合と異なり，この場合は（A-6）の合成解と（A-7）の厳密解は一致していないが，$\varepsilon\to 0$ の極限で式(A-7)は，式（A-6）と一致するのを確認できる．

高次の近似解を求める場合も，第一項を求めた場合と同様，各項のバランスを考えながらスケーリングの仕方を決定し，厳密に近似解を求めていくことができるが少々面倒くさい．ここではしばしば用いられる簡易的な方法を紹介する．

i）外部領域の解を

$$u_{\mathrm{out}}(x)=u^0_{\mathrm{out}}(x)+\varepsilon\,u^1_{\mathrm{out}}(x)+O(\varepsilon^2)\qquad\text{(A-8)}$$

とおく．この式を方程式（A-1）に代入し整理すると，

$$\left[\frac{\mathrm{d}u^0_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x}+\frac{3}{2}e^{-3x}\right]+\varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}^2u^0_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}u^1_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x}\right]+O(\varepsilon^2)=0\qquad\text{(A-9)}$$

この式は，$\varepsilon\ll 1$のときスケール分離された式になる．

第１項はすでに求めた$O(1)$の式である．第２項が今求めるべき$O(\varepsilon)$の式となっている．したがって，

$$\frac{\mathrm{d}^2u^0_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}u^1_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x}=0\qquad\text{(A-10)}$$

外側領域における０次($O(\varepsilon^0)$)の近似解　$u^0_{\mathrm{out}}(x)=\dfrac{1}{2}e^{-3x}+1$

を式(A-10)に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}u^1_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}^2u^0_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{9}{2}e^{-3x}\qquad\text{(A-11)}$$

すなわち，$u^1_{out}=\dfrac{3}{2}e^{-3x}+C_2$（一定）　となる．

無限遠での境界条件より，

$$\begin{aligned}u(\infty)=1=&\;\;1\;\;+\;\;\varepsilon\cdot 0\;\;+\;\;\varepsilon^2\cdot 0\;\;+\;\;\cdots\\ &=u^0_{\mathrm{out}}(\infty)+\varepsilon\cdot u^1_{\mathrm{out}}(\infty)+\varepsilon^2\cdot u^2_{\mathrm{out}}(\infty)+\;\;\cdots\end{aligned}$$

すなわち，$u^1_{\mathrm{out}}(\infty)=0$ ．　したがって，$C_2=0$，

$$u^1_{\mathrm{out}}(x)=\frac{3}{2}e^{-3x}\qquad\text{(A-12)}$$

となる．

ii）内部領域の解も，外部領域の解に合わせ次式で与える．

$$u_{\mathrm{in}}(x^*)=u^0_{\mathrm{in}}(x^*)+\varepsilon\,u^1_{\mathrm{in}}(x^*)+O(\varepsilon^2)\qquad\text{(A-13)}$$

方程式(A-1)を内部領域のパラメータ $x^*\equiv x/\varepsilon$ で表すと，

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}=-\varepsilon\frac{3}{2}e^{-3\varepsilon x^*}\qquad\text{(A-14)}$$

この式に式(A-13)を代入すると，

$$\left[\frac{d^2u^0_{\mathrm{in}}}{dx^{*2}}+\frac{du^0_{\mathrm{in}}}{dx^*}\right]+\varepsilon\left[\frac{d^2u^1_{\mathrm{in}}}{dx^{*2}}+\frac{du^1_{\mathrm{in}}}{dx^*}+\frac{3}{2}e^{-3\varepsilon x^*}\right]+O(\varepsilon^2)=0$$

さらに，　$e^{-3\varepsilon x^*}=1-3\varepsilon x^*+\dfrac{1}{2}(3\varepsilon x^*)^2+\cdots$ と展開できるので，

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2u^0_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u^0_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}\right]+\varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}^2u^1_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u^1_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}+\frac{3}{2}\right]+O(\varepsilon^2)=0\qquad\text{(A-15)}$$

となる．外部領域のときと同様，上式左辺第１項は，$O(1)$の式ですでに求めたものである．$O(\varepsilon)$の式は，第２項で

$$\frac{\mathrm{d}^2u^1_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u^1_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}+\frac{3}{2}=0\qquad\text{(A-16)}$$

境界条件は，　$u^1_{\mathrm{in}}(0)=0$　となるので，

$$u^1_{\mathrm{in}}(x^*)=C_4\left(-e^{-x^*}+1\right)-\frac{3}{2}x^*\qquad\text{(A-17)}$$

ここで，係数C_4は，$O(1)$のときと同様，外部領域との解の接合条件を満たすように決める．ただし，今の場合には，外部領域の１次までの近似解と内部領域の１次までの近似解を接合するようにC_4を決定する．

１次までの外部領域の近似解,

$$u_{\rm out}(x)=u^0_{\rm out}(x)+\varepsilon\, u^1_{\rm out}(x)+O(\varepsilon^2)$$

ここで，　$u^0_{\rm out}(x)=\frac{1}{2}e^{-3x}+1$　，　$u^1_{\rm out}(x)=\frac{3}{2}e^{-3x}$

を内部領域のパラメータ$x^*\equiv x/\varepsilon$で表すと次のようになる．

$$\begin{aligned}u_{out}(x^*)&=\frac{1}{2}e^{-3\varepsilon x^*}+1+\varepsilon\frac{3}{2}e^{-3\varepsilon x^*}+O(\varepsilon^2)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon\right)e^{-3\varepsilon x^*}+1+O(\varepsilon^2)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon\right)\left(1-3\varepsilon x^*+\frac{1}{2}(3\varepsilon x^*)^2+\cdots\right)+1+O(\varepsilon^2)\\&=\frac{3}{2}+\varepsilon\frac{3}{2}\left(1-x^*\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad\text{(A-18)}$$

一方，１次までの内部領域の近似解は,

$$\begin{aligned}u_{\rm in}(x^*)&=u^0_{\rm in}+\varepsilon u^1_{\rm in}+O(\varepsilon^2)\\&=\left[\frac{3}{2}\left(-e^{-x^*}+1\right)\right]+\varepsilon\left[C_4\left(-e^{-x^*}+1\right)-\frac{3}{2}x^*\right]+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

x^*が十分大きいところでは，$e^{-x^*}\to 0$　とみなせるので,

$$u_{\rm in}\cong\frac{3}{2}+\varepsilon\left(C_4-\frac{3}{2}x^*\right)\quad\text{(A-19)}$$

外部領域と内部領域の解の接合のため，式(A-18)と(A-19)を比較すると

$$C_4=\frac{3}{2}\quad\text{(A-20)}$$

を得る．

以上より，外部領域，内部領域の１次までの近似のレベルで以下の式が得られる．

$$u_{\rm out}(x)=\frac{1}{2}e^{-3x}+1+\varepsilon\frac{3}{2}e^{-3x}+O(\varepsilon^2)\quad\text{(A-21)}$$

$$\begin{aligned}u_{\rm in}(x)&=\frac{3}{2}\left(-e^{-x^*}+1\right)+\varepsilon\frac{3}{2}\left(-e^{-x^*}+1-x^*\right)+O(\varepsilon^2)\\&=\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)+\varepsilon\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}-\frac{x}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad\text{(A-22)}$$

次に，この１次までの近似解に対して，外部領域と内部領域の解を滑らかに接合した合成解を考えてみる．

$$u_{\rm unify}=u^0_{\rm unify}+\varepsilon u^1_{\rm unify}+O(\varepsilon^2)\quad\text{(A-22)}$$

とすると，$u^0_{\rm unify}$は，すでに求めた通り(A-6)式

$$u^0_{\rm unify}(x)=\frac{1}{2}e^{-3x}+1-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

となる．(A-18), (A-19)より，１次の項については，接合する部分で解が

$$U^1_{\rm match}=\frac{3}{2}\left(1-x^*\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\quad\text{(A-23)}$$

と振る舞うことを考慮して,

$$u^1_{\rm unify}=u^1_{\rm out}+u^1_{\rm in}-U^1_{\rm match}\quad\text{(A-24)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ u^1_{\rm unify}(x)&=\frac{3}{2}e^{-3x}+\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}-\frac{x}{\varepsilon}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\\&=\frac{3}{2}\left(e^{-3x}-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)\end{aligned}\quad\text{(A-25)}$$

以上より，１次までの近似で合成解は，次式となる．

$$u_{\rm unify}=\left(\frac{1}{2}e^{-3x}+1-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)+\varepsilon\frac{3}{2}\left(e^{-3x}-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)+O(\varepsilon^2)\quad\text{(A-26)}$$

さて，式(A-7)より，この問題の厳密解は

$$u_{\rm exact}=\frac{1}{2(1-3\varepsilon)}e^{-3x}+1-\frac{3(1-2\varepsilon)}{2(1-3\varepsilon)}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

であった．この式を，$\varepsilon\ll 1$として，１次（$O(\varepsilon^1)$）までの近似解を求めると,

$$\begin{aligned}u_{\rm exact}&=\frac{1}{2}(1-3\varepsilon)^{-1}e^{-3x}+1-\frac{3}{2}(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)^{-1}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\\&=\frac{1}{2}(1+3\varepsilon+O(\varepsilon^2))e^{-3x}+1-\frac{3}{2}(1-2\varepsilon)(1+3\varepsilon+O(\varepsilon^2))e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\\&=\left(\frac{1}{2}e^{-3x}+1-\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)+\varepsilon\frac{3}{2}\left(e^{-3x}-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad\text{(A-27)}$$

となり，１次までの近似で，（A-26）と（A-27）が一致するのを確認できる．

・境界層の位置が自明でない場合

これまで説明してきた例題１，例題２では，関数の定義域が$0\le x<\infty$であり，境界層は$x=0$の近傍に形成されるとして解析を進めた．実際には，境界層が形成される位置が自明でない場合も多く，境界層外部領域と内部領域で解の接合が可能かどうかにより，境界層の位置を判断する場合も多い．以下にそのような例を示す．

例題３：

$0\le x\le 1$で定義された関数$u(x)$を考える．$0<\varepsilon\ll 1$とし，$u(x)$は次の方程式と境界条件を満たすとする．

$$\varepsilon\frac{{\rm d}^2u}{{\rm d}x^2}-\frac{{\rm d}u}{{\rm d}x}=-\left(u-2\right)^2\quad\text{(A-28)}$$

$$\text{境界条件:}\quad u(0)=1,\qquad u(1)=-1\quad\text{(A-29)}$$

この問題も，最高階の微係数に小さな定数εがかかっているので，境界層型の特異摂動問題としての扱いが必要である．また，この問題では，右辺の$\left(2-u\right)^2$が非線形項となり，これまでの例題１，例題２とは異なり，厳密解が簡単にはもとまらない．この様な問題には，摂動法が特に役に立つ．以下，接合漸近展開法により近似解を求めることを考える．

(I) 境界層が$x=0$の近傍にあるとすると,

i) 十分遠方の外部領域では，$\varepsilon\ll 1$　より,

$O(\varepsilon^0)$ の項のみを考えると，

$$-\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x} = -\left(u_{\mathrm{out}} - 2\right)^2 \tag{A-30}$$

すなわち，

$$-\frac{1}{u_{\mathrm{out}} - 2} = x + C_0 \tag{A-31}$$

を得る．遠方での境界条件　$u(1) = -1$　より，

$$C_0 = -\frac{2}{3}$$

すなわち，　$u_{\mathrm{out}} = 2 - \dfrac{3}{3x-2}$　　(A-32)

ii) $x=0$ の近傍では，$x = \delta x^*$（$0 < \delta \ll 1$）と置き，方程式(A-28)の左辺の各項のオーダーについて調べる．

$$① \ : \ \varepsilon \frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}} = O\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) \tag{A-33}$$

$$② \ : \ \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\delta}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \tag{A-34}$$

右辺は，$x=0$ の近傍では，$u(0)=1$ より，$\left(u-2\right)^2 = O(1)$ となり，各項のオーダーの比較は，

$O(①項) : O(②項) : O(右辺)$ ＝ $O\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}\right) : O\left(\dfrac{1}{\delta}\right) : O(1)$

$x=0$ の近傍($\delta \ll 1$)でこれらのうちの２つの項のつり合いを考える。

a) 左辺第１項と右辺がつり合うとすると，

$$\mathrm{O}\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) = \mathrm{O}(1) \qquad \therefore\ \delta = O(\sqrt{\varepsilon})$$

この場合，左辺第２項は，$O\left(\dfrac{1}{\delta}\right) = O(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) \gg O(1)$

となり，第１項と右辺より大きくなる。すなわち，第１項と右辺がつり合って解が決まるという仮定と合わなくなる。

b) 左辺第１項目と第２項目がつり合うとすると，

$$O\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \qquad \therefore\ \delta = O(\varepsilon)$$

この場合は，

$O\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{\delta}\right) = O\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$　$\gg$　(右辺) となり，

第１項と第２項がつり合い, 右辺が無視できることになる。

c) 左辺第２項目と右辺は，$\delta \ll 1$　より，
(第２項) $\gg$ (右辺) となりつり合わない。

以上より，内部領域（境界層内）では，上記 b)が成り立っている．したがって，$x \equiv \varepsilon x^*$　とし，

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}} - \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*} = 0 \tag{A-35}$$

$$\therefore \quad u_{\mathrm{in}} = C_1 e^{x^*} + C_2 \tag{A-37}$$

境界条件　$u_{\mathrm{in}}(0) = 1$ より，

$$C_1 + C_2 = 1 \tag{A-36}$$

したがって，

$$u_{\mathrm{in}} = C_1 e^{x^*} + (1 - C_1) \tag{A-37}$$

を得る．
以上より，

i) 外部領域で　$u_{\mathrm{out}} = 2 - \dfrac{3}{3x-2}$

ii) 内部領域で　$x^* \equiv \dfrac{x}{\varepsilon}$ とし，

$$u_{\mathrm{in}} = C_1 e^{x^*} + (1 - C_1)$$

このとき外部領域の解 u_{out}　と内部領域の解 u_{in} を接合するため，$\lim\limits_{x\to 0} u_{\mathrm{out}}$　，　$\lim\limits_{x^*\to\infty} u_{\mathrm{in}}$　を調べる．

$$\lim_{x\to 0} u_{\mathrm{out}} = 2 - \frac{3}{0-2} = \frac{7}{2} \tag{A-38}$$

$$\lim_{x^*\to\infty} u_{\mathrm{in}} = \begin{cases} \infty & (C_1 > 0) \\ 0 & (C_1 = 0) \\ -\infty & (C_1 < 0) \end{cases} \tag{A-39}$$

となり，このとき $\lim\limits_{x\to 0} u_{\mathrm{out}} = \lim\limits_{x^*\to\infty} u_{\mathrm{in}}$ を満たすように C_1 を決定することはできない．すなわち，$x=0$ で解の接合を行うことはできず，$x=0$ 近傍に境界層をもつ解を構成することはできない．

(II) 境界層が $x=1$ の近傍にあるとすると，

i) 十分遠方の外部領域では，(I) の場合と同様に以下の式が成り立つ．

$$-\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{out}}}{\mathrm{d}x} = -\left(u_{\mathrm{out}} - 2\right)^2 \tag{A-40}$$

$$\therefore \quad u_{\mathrm{out}} = 2 - \frac{1}{x + C_0} \tag{A-41}$$

遠方での境界条件は，この場合は $x=0$ で与えられ，$u(0)=1$．
すなわち，

$$u_{\mathrm{out}} = 2 - \frac{1}{x+1} \tag{A-42}$$

となる．

ii) $x=1$ の近傍では，$1 - x = \delta x^*$（$0 < \delta \ll 1$）と置き，方程式(A-28)の左辺の各項のオーダーについて調べる．

$\mathrm{d}x = -\delta \mathrm{d}x^*$ となることに注意すると，

$$① \ : \ \varepsilon \frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varepsilon}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}} = O\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) \tag{A-43}$$

$$② \ : \ \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\delta}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \tag{A-44}$$

右辺は，$x=1$ の近傍では，$u(1) = -1$ より，

$\left(u-2\right)^2 \cong 9 = O(1)$ となり，各項のオーダーの比較は，

$O(①項) : O(②項) : O(右辺)$ ＝ $O\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta^2}\right) : O\left(\dfrac{1}{\delta}\right) : O(1)$

$x=1$ の近傍($\delta \ll 1$)でこれらのうちの２つの項のつり合いを考える。(I)の場合と同様にして，左辺第１項目と第２項目がつり合うときが求めるべき解であり，このとき，

$$O\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)=O\left(\frac{1}{\delta}\right) \qquad \therefore\ \delta=O(\varepsilon)$$

したがって，$\delta\equiv\varepsilon$ すなわち，

$$1-x=\varepsilon x^* \qquad \text{(A-45)}$$

とすると，　$\mathrm{d}x=-\varepsilon\mathrm{d}x^*$ より，

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}$$

したがって，境界層内で満たされる式は次式となる．

$$\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^{*2}}+\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}x^*}=0 \qquad \text{(A-46)}$$

この式を解くと，

$$u_{\mathrm{in}}=C_1e^{-x^*}+C_2 \qquad \text{(A-47)}$$

さらに，$x=1$ で $x^*=0$ となることを考慮し，
$x=1$ での境界条件 $u_{\mathrm{in}}(1)=-1$ を用いると，

$$u_{\mathrm{in}}=C_1e^{-x^*}-(1+C_1) \qquad \text{(A-48)}$$

以上より，境界層が $x=1$ の近傍にあるとすると，

i) 外部領域で　$u_{\mathrm{out}}=2-\dfrac{1}{x+1}$

ii) 内部領域で　$x^*\equiv\dfrac{1-x}{\varepsilon}$ とし，

$$u_{\mathrm{in}}=C_1e^{-x^*}-(1+C_1)$$

このとき外部領域の解 u_{out} と内部領域の解 u_{in} を接合することを考えると

$$\lim_{x\to1}u_{\mathrm{out}}=2-\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2} \qquad \text{(A-49)}$$

$$\lim_{x^*\to\infty}u_{\mathrm{in}}=-(1+C_1) \qquad \text{(A-50)}$$

$\lim_{x\to1}u_{\mathrm{out}}=\lim_{x^*\to\infty}u_{\mathrm{in}}$ を満たすためには,

$$C_1=-\frac{5}{2} \qquad \text{(A-51)}$$

すなわち，境界層は，$x=1$ の近傍に形成され，

i) 外部領域で　$u_{\mathrm{out}}=2-\dfrac{1}{x+1}$　(A-52)

ii) 内部領域で　$u_{\mathrm{in}}=-\dfrac{5}{2}\exp\left[-\dfrac{1-x}{\varepsilon}\right]+\dfrac{3}{2}$　(A-53)

とすれば良い．

[高木　周（東京大学・大学院工学系研究科・機械工学専攻）]