機械屋の数学 第10回 補足資料

・球座標系におけるラプラス方程式の一般解

本特集「機械屋の数学」では，偏微分方程式の解法として，演算子の固有値問題として考えることにより，変数分離法がうまく使える条件について説明したきた。ここでは，一般的によく用いられる変数分離法により，球座標系におけるラプラス方程式の解を求める方法について示しておく。

ラプラス方程式$\nabla^2 f=0$を，球座標系で表記すると，次式となる．

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]=0 \tag{A-1}$$

与えられた境界条件に対して，この方程式を変数分離法により求める方法を以下に示す．

変数分離法では，方程式（A-1)の解を，

$$f(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{A-2}$$

とおく．この式を，式(A-1)に代入し，全体を$R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$で割ると次式を得る．

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=0 \tag{A-3}$$

この式を$\Phi(\varphi)$を含んだ式とそれ以外に分け，これまでと同様にして，定数λを用いて，次式のように置く．

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)\right]=-\lambda \tag{A-4}$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+\lambda\Phi=0 \tag{A-5}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\lambda=0 \tag{A-6}$$

式(A-5)より，

$$\Phi(\varphi)=C\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+S\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi \tag{A-7}$$

と置くことができ，

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \tag{A-8}$$

の関係を用いると，

$$2\pi\sqrt{\lambda}=2\pi m \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{A-9}$$

すなわち，

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,\cdots) \tag{A-10}$$

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+S_m\sin m\varphi \tag{A-11}$$

を得る．また，$\lambda=m^2$ を(A-6)に代入し整理すると，

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\mu \tag{A-12}$$

とすることができる．したがって，

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-\mu \tag{A-13}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\mu \tag{A-14}$$

(A-14)式は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\mu R=0 \tag{A-15}$$

すなわち，

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\mu R=0 \tag{A-16}$$

となる．この式は，rのべきに関して，各項が同じ次数になっており，オイラー型の微分方程式と呼ばれ，$R(r)=r^n$の形の基本解を持つ．$R(r)=r^n$として代入すると，

$$\{n(n-1)+2n-\mu\}r^n=0 \tag{A-17}$$

すなわち，

$$n(n-1)+2n-\mu=0\ , \tag{A-18}$$

$$\therefore\quad \mu=n(n+1) \tag{A-19}$$

の関係を満たすnを選べば，常微分方程式(A-16)の基本解となることがわかる．$\mu=n(n+1)$として，式(A-16)に代入すると，

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-n(n+1)R=0 \tag{A-20}$$

となる．もう１つの基本解も求めるため，$R(r)=r^p$とおき，式(A-20)に代入すると，

$$(p-n)(p+n+1)=0 \tag{A-21}$$

を得る．したがって，$p=n,\ -(n+1)$，すなわちr^nと$r^{-(n+1)}$が基本解となり，

$$R_n(r)=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}} \tag{A-22}$$

と表すことができる．さらに，$\mu=n(n+1)$を式(A-13)に代入し，整理すると，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0 \tag{A-23}$$

となる．ここで，$\zeta\equiv\cos\theta$，$P_{n\,m}(\zeta)\equiv\Theta(\vartheta)$と置き，$\dfrac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$となることに注意して式(A-23)を変形すると，次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}P_{n\,m}}{\mathrm{d}\zeta}\right)+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{(1-\zeta^2)}\right\}P_{n\,m}=0 \tag{A-24}$$

この式は，ルジャンドルの陪微分方程式と呼ばれ，スツルム・リウビル型の形をもっており，得られる解$P_{n\,m}(\zeta)$（ただし，$0\le m\le n$）は直交関係を満たす．式(A-23)は，２階の微分方程式であるから，２種類の独立した関数系を持っており，それぞれ第１種ルジャンドル陪関数P_{nm}，第２種ルジャンドル

ル陪関数Q_{nm}と呼ばれる．これらのうち，Q_{nm}は，$\zeta=\pm 1$に対数的特異点を持つため，$\zeta=\cos\theta$（$0\le\theta\le\pi$）により記述される(A-24)の一般解は，第１種ルジャンドル陪関数P_{nm}による級数の形式で与えられる．

以上より，球座標系のラプラス方程式

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

の一般解は,

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_{nm}(\cos\theta)\times (C_m\cos m\varphi+S_m\sin m\varphi)\right\} \tag{A-25}$$

となる。

本文で挙げた例題の場合は, 一様流中の変形物体を考えており，軸対称問題を扱っている．軸対称問題では，式(A-25)において$m=0$として，

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{A-26}$$

と解を与えることができる．（$P_n(\cos\theta)\equiv P_{n0}(\cos\theta)$）

ここで, $P_n(\cos\theta)$は, 式(A-24)において，$m=0$とした式、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\zeta}\right)+n(n+1)P_n=0 \tag{A-27}$$

の解である. この式は, ルジャンドルの微分方程式と呼ばれ, 解として第 1 種および第２種のルジャンドル関数が得られる．ルジャンドル陪関数とルジャンドル関数の間には,

$$P_{nm}(\zeta)=(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\zeta^m}P_n(\zeta) \tag{A-28}$$

の関係があり，$P_n(\zeta)$は, ζのn次多項式で与えられるため,

$$m>n \quad のとき,\qquad P_{nm}(\zeta)=0 \tag{A-29}$$

となる.

・学会誌 11 月号，式(102)から式(104)への導出過程

学会誌 11 月号本文の式(102)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(k+1)B_k}{R_0^{k+2}}P_k(\cos\theta)=-3U_\infty\cos\theta\,P_n(\cos\theta)-\frac{3}{2}U_\infty\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\theta} \tag{102}$$

にルジャンドル多項式の直交関係式,

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{103}$$

を適用して係数B_kを決定するのだが，式(102)は，このままでは，直交関係式を使えないため，以下のルジャンドル多項式に関する漸化式を利用する

$$\cos\theta\,P_n(\cos\theta)=\frac{1}{2n+1}\left\{(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)+nP_{n-1}(\cos\theta)\right\}$$

$$\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}=\frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(\cos\theta)-P_{n-1}(\cos\theta))$$

この２式を用いると,

$$-3U_\infty\cos\theta\,P_n(\cos\theta)-\frac{3}{2}U_\infty\sin\theta\frac{\partial P_n}{\partial\theta}$$

$$=-\frac{3}{2}U_\infty\left[\frac{2}{2n+1}\left\{(n+1)P_{n+1}(\cos\theta)+nP_{n-1}(\cos\theta)\right\}+\frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(\cos\theta)-P_{n-1}(\cos\theta))\right]$$

$$=-\frac{3}{2}U_\infty\frac{1}{2n+1}\left[(n+1)(n+2)P_{n+1}(\cos\theta)-n(n-1)P_{n-1}(\cos\theta)\right]$$

ゆえに式(102)は

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(k+1)}{R_0^{k+2}}P_k(\cos\theta)=\frac{3}{2}U_\infty\frac{1}{2n+1}\left[(n+1)(n+2)P_{n+1}(\cos\theta)-n(n-1)P_{n-1}(\cos\theta)\right] \tag{A-30}$$

となる．この式の両辺にルジャンドル関数$P_m(\cos\theta)$を乗じ，$\sin\theta$の重みをつけた内積をとると，ルジャンドル関数の直交関係式(103)を用いることができ，

$$(\text{左辺})=\int_0^\pi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(k+1)}{R_0^{k+2}}P_k(\cos\theta)\right\}P_m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{B_m}{R_0^{m+2}}\frac{(m+1)}{2m+1}$$

$$(\text{右辺})=\int_0^\pi\left[\frac{3}{2}U_\infty\frac{1}{2n+1}\left\{(n+1)(n+2)P_{n+1}(\cos\theta)-n(n-1)P_{n-1}(\cos\theta)\right\}\right]P_m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}U_\infty\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+1}\delta_{m,n+1}-\frac{n(n-1)}{2n+1}\delta_{m,n-1}\right]\frac{1}{2m+1}$$

$$=\frac{3}{2}U_\infty\left[\frac{m(m+1)}{(2m-1)(2m+1)}\delta_{m,n+1}-\frac{m(m+1)}{(2m+3)(2m+1)}\delta_{m,n-1}\right]$$

したがって,

$$m=n+1\quad のとき：\quad B_m=\frac{3}{2}U_\infty R_0^{m+2}\frac{m}{2m-1},$$

$$\therefore\quad B_{n+1}=\frac{3}{2}U_\infty R_0^{n+3}\frac{n+1}{2n+1}$$

$$m=n-1\quad のとき：\quad B_m=-\frac{3}{2}U_\infty R_0^{m+2}\frac{m}{2m+3},$$

$$\therefore\quad B_{n-1}=-\frac{3}{2}U_\infty R_0^{n+1}\frac{n-1}{2n+1}$$

となる．この式は，n次の微小変形が球周りの流れと干渉し，$n+1$次と$n-1$次のポテンシャル流れを誘起していることを意味している．すなわち，$r=R_0$の球周りの$\varDelta r=\varepsilon_n R_0 P_n(\cos\theta)$の変形によって，式(104)で与えられる

$$\varphi_1=\left[\frac{B_{n-1}}{r^n}P_{n-1}(\cos\theta)+\frac{B_{n+1}}{r^{n+2}}P_{n+1}(\cos\theta)\right]$$

$$=\frac{3}{2}U_\infty\left[-\frac{R_0^{n+1}}{r^n}\frac{n-1}{2n+1}P_{n-1}(\cos\theta)+\frac{R_0^{n+3}}{r^{n+2}}\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(\cos\theta)\right] \tag{104}$$

の流れが生じる。

［ 高木　周（東京大学・大学院工学系研究科・機械工学専攻） ］